



Квази вариацийн тэнцэтгэл бишийн хувьд динамик системтэй холбогдох алгоритмын судалгаа

Суурь судалгааны төслийн тайлан

2022 он

Төслийн удирдагч:

Л.Алтангэрэл, доктор (PhD), МГТИС-ийн
профессор

Санхүүжүүлэгч байгууллага:

Шинжлэх ухаан технологийн сан

Захиалагч байгууллага:

Боловсрол, соёл, шинжлэх ухааны яам

Гарчиг

1	Оршил	5
2	Квази вариацийн тэнцэтгэл биш ба Ерөнхийлсэн Нэшийн тэнцвэрийн бодлого	10
2.1	Квази вариацийн тэнцэтгэл бишийг бodoх алгоритм	10
2.2	Хамтын зааглалттай ерөнхийлсэн Нэшийн тэнцвэрийн загварын зэсийн зэх зээл дэх хэрэглээ	11
2.2.1	Сонгодог Нэшийн тэнцвэрийн загвар ба вариацийн тэнцэтгэл биш	11
2.2.2	Хамтын зааглалттай ерөнхийлсэн Нэшийн тэнцвэрийн загвар . . .	12
2.2.3	Зэсийн зах зээл дэх хэрэглээ ба вариацийн тэнцэтгэл бишийн томъёолол	12
3	Төлбөрийн чадварын зааглалттай даатгалын хураамжийн загвар	15
3.1	Нэг үет даатгалын загвар	15
3.2	Нэг үет загварын өргөтгөл	16
3.3	Тоон туршилт	18
4	Төлбөрийн чадварын зааглалттай банкны зээлийн хүүгийн загварууд	19
4.1	Төлбөрийн чадварын зааглалттай банкны загвар	19
4.2	Тоон туршилт	24
5	Нийлмэл Нэгэн Төрлийн Бус Пуассоны Процесс Дээр Суурилсан Стохастик DDM	26
5.1	Аргачлал: Нийлмэл Нэгэн Төрлийн Бус Пуассоны Процесс	26
5.1.1	Ноогдол ашиг	26
5.1.2	Дефолт болох магадлал	27
5.1.3	Хувьцааны санамсаргүй үнэ	28
5.1.4	Параметрүүдийн хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт	30
5.2	Тоон туршилт	32
5.3	Хавсралтууд	34

Төслийн багийн гишүүд

N	Нэрс	Албан тушаал
1	Др. Л.Алтангэрэл	МГТИС-ийн профессор
2	Др. Г.Баттөр	МУИС-ийн ХШУИС-ийн багш
3	Др. Г.Баттулга	МУИС-ийн ХШУИС-ийн багш
4	Г.Доржсундуй	МГТИС-ийн багш, магистр

Төслийн хүрээнд тавигдсан зорилтууд

1. Зааглалт нь шилжигч олонлог байх тохиолдолд квази вариацийн тэнцэтгэл бишийн хувьд динамик системтэй холбогдох алгоритм боловсруулж, нийлэлтийг нь батлан, тоон туршилтаар баталгаажуулна.
2. Шугаман хамтын зааглалттай ерөнхийлсэн Нэшийн тэнцвэрийн бодлогын хувьд уг алгоритмыг туршиж, холимог ерөнхийлсэн Нэшийн тэнцвэрийн бодлогын хувьд гарган авсан зааг функцийн чанаруудыг судлах замаар тохирох алгоритмыг санал болгоно.
3. Хөрөнгийн даатгалын хувьд гарган авсан олон үет загварыг ерөнхийлсэн Нэшийн тэнцвэрийн загварт шилжүүлэх үндэслэлийг гаргаж, тоон туршилтаар баталгаажуулан, практикт хэрэглэх зөвлөмжийг боловсруулна.
4. Хувьцааны ханинийг таамаглах VAR загварыг санал болгож, түүний багцын сонголт болон тоглоомын онолтой хэрхэн холбогдох судалгааг хийнэ.

БҮЛЭГ 1

Оршил

Квази вариацийн тэнцэтгэл биш нь оптимизацийн бодлогын шийд оновчтой байх нөхцөл, гүйцээлтийн бодлого, вариацийн тэнцэтгэл биш, шугаман бус тэгшитгэлийн систем зэрэг бодлогуудын өргөтгөсөн хэлбэр болохоос гадна дурс боловсруулалт, хүрээлэн буй орчны бодлого, сүлжээний бодлого зэрэг хэрэглээтэй холбоотойгоор сүүлийн жилүүдэд эрчимтэй судлагдаж байна. Мөн стратегийн олонлог нь бусад тоглогчдын стратегиас хамаардаг ерөнхийлсэн Нэшийн тэнцвэрийн загвар нь тоглогч бурийн хожлын функц дифференциалчлагддаг тохиолдолд квази вариацийн тэнцэтгэл биш рүү шилждэг. Тухайн бодлогын хүндрэл нь зааглалтын олонлог нь хувьсагчаас хамаарсан олонлог утгат буулгалт байдагтай холбоотой. Энэ төслийн хүрээнд тавигдсан нэг зорилт нь сүүлийн жилүүдэд динамик системтэй холбоотойгоор оптимизацийн болон вариацийн тэнцэтгэл бишийн хувьд эрчимтэй судлагдаж буй аргуудыг судалж, зааглалт нь шилжигч олонлог байх тохиолдолд квази-вариацийн тэнцэтгэл бишийн хувьд шинэ алгоритм боловсруулж, нийлэлтийг нь батлан улмаар ерөнхийлсэн Нэшийн тэнцвэрийн бодлогын тодорхой ангиid хэрэглэх явдал юм. Түүнээс гадна өмнө хийгдсэн квази-вариацийн тэнцэтгэл бишийн хувьд зааг функцтэй холбоотой судалгааг үргэлжлүүлэхээс гадна санхүүгийн зах зээл дэх тоглоомын онолын болон дискаунчлагдсан ноогдол ашгийн загвартай холбоотой зарим үр дүнг гарган авахаар төлөвлөсөн.

Төслийн хүрээнд тавигдсан зорилттой холбоотойгоор хийгдсэн судалгаа болон ажлуудыг тоймлон хүргэвэл:

2018 он:

- Судалгааны сэдэвтэй холбоотойгоор багийн гишүүд оролцсон судалгааны семинарыг тогтмол явуулснаас гадна динамик системтэй холбогдох оптимизацийн болон вариацийн тэнцэтгэл бишийн зарим алгоритмын талаар илтгэлийг төслийн удирлагч Л.Алтангэрэл 2018 оны 11-р сарын 17-нд МУИС-д болсон "Хэрэглээний математик 2018" эрдэм шинжилгээний хуралд хэлэлцүүлсэн.
- Мөн 2018 оны 12-р сарын 17-19-нд Австрийн Венийн их сургуульд зохион байгуулагдсан "The Vienna Workshop on Computational Optimization" олон улсын хуралд Л.Алтангэрэл оролцож, квази вариацийн тэнцэтгэл бишийн зааг функцийн талаар гаргасан үр дүнгийн талаар хэлэлцүүлсэн. Уг олон улсын хуралд АНУ, Канад, ХБНГУ зэрэг улсын оптимизаци, загварчлалын чиглэлийн нэр хүндтэй эрдэмтэд уригдсан илтгэл хэлэлцүүлснээс гадна Австри, Герман, Итали, Франц, Швед, Монгол зэрэг орны их сургуулиудад ажиллаж буй судлаачид өөрсдийн судалгааны үр дүнгээ танилцуулсан. Тухайлбал энэ хурлын үеэр Канадын Бритиш Колумбиын их сургуулийн профессор Баушке, Австрийн Венийн их сургуулийн профессор Бот нартай уулзаж, энэ төслийн хүрээнд тавигдсан зорилтуудыг биелүүлэхэд хэрхэн хамтран ажиллах талаар ярилцсан.
- Даатгалын салбарт тоглоомын онолыг хэрэглэх судалгаа нэлээд эртнээс эхэлсэн бөгөөд даатгалын компаниуд хураамжaa тогтоодог Берtrandын эсвэл нөхөн төлбөрийн оновчтой хэмжээг тогтоодог Курногийн гэсэн 2 загварт хуваан

үзэж болно. 2013 онд Дутанг нар тоглогч бүр даатгуулагчтай хийх гэрээг шинэчлэх замаар ашгаа хамгийн их байлгах Нэшийн тэнцвэрийн загварыг санал болгосон. Мөн уг загварт тоглогч бүрийн өөрийн хөрөнгийн алдагдлын доод хязгаарыг тооцож оруулсан. Энэ тохиолдолд зорилтын функц нь эрс хотгороос гадна шугаман зааглалттай учир Нэшийн тэнцвэрийн цэг цор ганц олдохыг харуулж, хүчин зүйлүүдийн хамаарал буюу мэдрэмжийн судалгаа хийгдсэн байдаг. Ер нь тухайн хэрэглэгчийн хувьд даатгалтай байх эсэх нь эдийн засгийн хүчин зүйлээс хамааралтай гэж үзэн, нэг даатгалын компаниас нөгөөд шилжих магадлалыг тооцсон шилжилтийн матрицийг оруулах замаар олон үет загварыг томъёолон, Нэшийн тэнцвэр цэг цор ганц олдох болон мэдрэмжийн талаар үр дүнгүүдийг гарган авсан нь 2018 оны 12-р сард Applied Mathemaisics сэтгүүлд хэвлэгдсэн.

2019 он:

- Төслийн удирдагч Проф. Л.Алтангэрэл 2019 оны 6-р сарын 21-23-нд Улаанбаатар хотод болсон "The 6th International Conference on Optimization, Simulation and Control" олон улсын хурлыг Проф. Р.Энхбат, Dr. Ч.Алтаннаар, Dr. Ч.Баттушиг нарын хамт хамтран зохион байгуулсан бөгөөд уг хуралд 10 гаруй орны 50 гаруй эрдэмтэн, судлаачид илтгэлээ хэлэлцүүлсэн. Төслийн багаас уг хуралд нийт 2 илтгэл амжилттай хэлэлцүүлсэн.
- Австрийн Венийн их сургуулийн судлаач Dr. Роберт Четнек 2019 оны 11-р сарын 20-24-нд уг судалгааны төслийн хүрээнд МГТИС-д айлчлах үеэр Квази вариацийн тэнцэтгэл бишийн хувьд зааглалт нь шилжигч олонлог байх тохиолдолд алгорит боловсруулах талаар хамтарсан судалгааны семинар явуулсан бөгөөд үр дүнд нь тухайн бодлогыг бodoх Цэнгийн алгоритмыг санал болгож, нийлэлтийн баталгаа нь хийгдсэн.
- Мөн 2019 оны 10-р сард ОХУ-ын Эрхүүгийн их сургуульд болсон "Dynamical Systems, Optimal Control and Mathematical Modeling" сэдэвт олон улсын хуралд Dr. Г.Баттөр оролцож, "Theory and Methods for Generalized Nash Equilibrium Problems" сэдвээр илтгэл хэлэлцүүлсэн. Тухайлбал оптимизацийн хосмогийн онол, шийд оновчтой байх нөхцөл болон торгуулийн функцийг ашиглан Ерөнхийлсэн Нэшийн тэнцвэрийн бодлогыг параметрээс хамаарсан вариацийн тэнцэтгэл бишид шилжүүлэх замаар аль болох олон шийдийг олох аргыг санал болгосон судалгааны үр дүн Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics сэтгүүлд хэвлэгдсэн.
- Хөрөнгийн даатгалын хувьд томъёолсон олон үет загварыг банкны салбарт хэрхэн хэрэглэх боломжтой талаар судалж, зарим үр дүнг гарган авсан. Зээлийн хүүгээрээ өрсөлддөг банкны зах зээлд төв банкнаас шаарддаг өөрийн хөрөнгийн үнэлгээний үзүүлэлтийг хангасан байхаар банкууд Нэшийн тэнцвэрт хүргэх зээлийн хүүг хэрхэн тогтоох боломжтойг үзүүлсэн. Өөрийн хөрөнгийн хүрэлцээний зааглалтаар Basel-I, Basel-II-аас шаарддаг өөрийн хөрөнгийн зааглалт мөн Expected Shortfall зааглалтыг авч үзсэн. Загваруудын хувьд тэнцвэрт хүү оршин байхыг баталж, мэдрэмжийн шинжилгээг хийж сонгон авсан гурван банкны хувьд тоон туршилт явуулсан. Энэхүү үр дүнг 2019 оны 3-р сарын 27-нд явагдсан Монголбанкны нэрэмжит эрдэм шинжилгээний хурлын сүүлийн шатаанд амжилттай шалгаран оролцож, багаараа 2-р байрыг эзэлснээс гадна энэ судалгааны ажил Optimization Methods and Software сэтгүүлийн 2021 оны дугаарт хэвлэгдсэн.

2020-2021 он:

- 2020 оны эхээр КОВИД цар тахал гарсантай холбоотойгоор төслийн санхүүжилт хойшлогдсон боловч судалгааны семинарыг тогтмол явуулж, сэтгүүлд

явуулсан ажлуудыг сайжруулах болон Нэшийн тэнцвэрийн загварын хэрэглээ болон оптимизаци, вариацийн тэнцэтгэл биштэй холбоотой судалгааг үргэлжлүүлсэн. 2021 оны эхээр Боловсрол шинжлэх ухааны яам, Шинжлэх ухаан, технологийн сан зэрэг байгууллагуудын төлөөлөл оролцсон ажлын хэсэгт төслийн явцын үр дүнгүүдийг танилцуулсны үр дүнд З дахь жилийн санхүүжилтийг олгосноор зарим төлөвлөсөн ажлуудыг үргэлжлүүлж төслийг амжилттай дуусгах боломжийг олгосон.

- Тухайлбал, 2019 онд Улаанбаатарт болсон олон улсын хурлын үеэр ярилцаж тохирсоор Францын Версалийн их сургуультай хамтран CIMPA буюу Олон улсын онолын болон хэрэглээний математикийн төвийн дэмжлэгтэйгээр "Data assimilation, optimization, and applications" сэдэвт олон улсын зуны сургалтыг 2021 оны 7-р сарын 5-наас 10-ны хооронд амжилттай зохион байгууллаа. CIMPA-аас магистр, докторын оюутнууд, судлаачдад зориулсан энэхүү зуны сургалтыг 1997 оноос хөгжиж буй орнуудад зохион байгуулж эхэлсэн бөгөөд Монголын хувьд өмнө нь 2013 онд МУИС, ШУТИС-д, 2015 онд МУИС, мөн 2017 онд ШУТИС болон Ховд их сургуультай хамтран зохион байгуулж байсан. Энэ удаагийн "Data assimilation, optimization, and applications" сэдэвт сургалтыг COVID-19 цар тахалтай холбоотойгоор МГТИС-д цахимаар болон танхимд гэсэн хосолмол хэлбэрээр зохион байгуулснаараа онцлогтой бөгөөд ШУА-ийн Математик, тоон технологийн хүрээлэн, МУИС, ШУТИС, МУБИС, МГТИС болон Франц, Итали зэрэг орнуудаас 50 гаруй хүн оролцхоор бүртгүүлж, 10 гаруй нь танхимаар оролцсон. Энэ удаагийн сургалтанд оптимизацийн үндэс, бүхэл тоон програмчлал, квази гүдгэр оптимизаци, тоглоомын онол, оптимизацийн эдийн засаг, санхүү дэх хэрэглээ, болон хар хайрцагны симуляци, тодорхойгүй нөхцөл дэх оптимизацийн үндэс зэрэг практик хэрэглээ бүхий сэдвүүдээр Версалийн их сургуулийн профессор Лоран Дюма, Версалийн их сургуулийн профессор Ц.Идэр, ШУА-ийн МТТХ-ийн секторын эрхлэгч, проф. Р.Энхбат, Перпанегийн их сургуулийн профессор Диде Осель зэрэг профессор, багш нар 2-3 удаагийн сонирхолтой лекцийг хэлэлцүүлсэн нь оролцогчид, судлаачдын хувьд судалгаанд хэрэгцээтэй суурь мэдлэгийг өгч, цаашид энэ чиглэлээр судалгаанд оролцоход дэмжлэг үзүүлсэн сургалт болсон.
- 2021 оны 10-р сард төслийн судлаач, МУИС-ийн багш Г.Баттулга "Mathematical Models in Finance and Insurance" сэдвээр Математикийн ухааны докторын зэргийг амжилттай хамгаалсан.

Энэхүү төслийн хүрээнд хэвлэгдсэн нэг сэдэвт бүтээл, судалгааны өгүүлэл болон илтгэлүүдийг жагсаавал:

Докторын диссертаци

1. Battulga, G. *Mathematical Models in Finance and Insurance*, PhD dissertation, National University of Mongolia, 2021.

Судалгааны өгүүлэл

1. Battulga, G.; Altangerel, L. ; Battur, G. *An extension of the one period model in non-life insurance markets*, Applied Mathematics 9, No.12, 1339-1350, 2018.
2. Баттулга, Г.; Алтангэрэл, Л.; Battur, Г. *Өөрийн хөрөнгийн хүрэлцээний зааглалттай банкны зээлийн хүүгийн өрсөлдөөний загвар*, Монголбанкны нэрэмжит эрдэм шинжилгээний хурлын илтгэлийн эмхэтгэл, 2019.
3. Altangerel, L.; Battur, G. *An Exact Penalty Approach and Conjugate Duality for Generalized Nash Equilibrium Problems with Coupling and Shared Constraints*, the Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, , vol. 32, pp. 3-16, 2020.
4. Altangerel, L. *On Characterizations of Weak Sharp Minima in Optimization Problems with Applications to Variational Inequalities*, Mongolian Mathematical Journal 22, 13-19, 2020.
5. Battulga, G.; Altangerel, L. ; Battur, G. *Loan Interest Rate Nash Models with Solvency Constraints in the Banking Sector*, Optimization Methods and software. Feb. 2021 (IF – 1.431).
6. Otgochuluu, Ch.; Altangerel, L.; Khashchuluun, Ch.; Dojrsundui, G. *A game theory application in the copper market*, Resources Policy 70, March 2021 (IF – 5.634).
7. Battulga, G.; Kleinow, J.; Altangerel, L. Horsch, A. *Dividends and Compound Poisson-processes: A new Stochastic Stock Price Model*, accepted in International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2022 (IF – 1.096).

Тавигдсан илтгэл

1. Алтангэрэл, Л. *Көвази вариацийн тэнцэтгэл бишийн хувьд динамик системтэй холбогдох зарим алгоритм*, "Хэрэглээний математик 2018" эрдэм шинжилгээний хурал, МУИС, 2018-11-17.
2. Баттулга, Г. *Stochastic Dividend Discount Model based on VAR process*, "Хэрэглээний математик 2018" эрдэм шинжилгээний хурал, МУИС, 2018-11-17.
3. Altangerel, L. *Gap functions for quasi-variational inequalities via duality*, The Vienna Workshop of Computational Optimization, Austria, December 17-19, 2018
4. Баттулга, Г. *Өөрийн хөрөнгийн хүрэлцээний зааглалттай банкны зээлийн хүүгийн өрсөлдөөний загвар*, Монголбанкны нэрэмжит эрдэм шинжилгээний хурал 2019 оны 3-р сарын 27.
5. Altangerel, L. *Variational Inequalities and Some Applications of Nash Equilibrium Problems*, "International Conference on Optimization, Simulation and Control - 2019", June 21-23, 2019, Ulaanbaatar.
6. Battulga, G.; Kleinow, J.; Altangerel, L. *Stochastic $(n + 1)$ -period dividend discount model based on compound non homogeneous poisson process*, "International Conference on Optimization, Simulation and Control - 2019", June 21-23, 2019, Ulaanbaatar (poster)

7. Battur, G., Altangerel, L. *Theory and Methods for Generalized Nash Equilibrium Problems*, International Symposium Dynamical Systems, Optimal Control and Mathematical Modeling, October 7-11 2019, Irkutsk.

БҮЛЭГ 2

Квази вариацийн тэнцэтгэл биш ба Ерөнхийлсэн Нэшийн тэнцвэрийн бодлого

2.1 Квази вариацийн тэнцэтгэл бишийг бодох алгоритм

$$(QVI) \quad \langle T(x), y - x \rangle \geq 0, \forall y \in K(x)$$

нөхцлийг хангах $x \in K(x)$ векторыг олох квази-вариацийн тэнцэтгэл бишийн бодлогыг авч үзэх бөгөөд дараах нөхцлүүдийг биелдэг гэж үзье.

1. $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ нь $L \geq 0$ тогтмол бүхий Липшиц тасралтгүй:

$$\|T(x) - T(y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

2. $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ нь $\rho > 0$ тогтмол бүхий хүчтэй монотон:

$$\langle x - y, T(x) - T(y) \rangle \geq \rho\|x - y\|^2, \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

3. $K(x) = m(x) + K, \forall x \in \mathbb{R}^n,$

4. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ нь хоосон, битүү, гүдгэр олонлог,

5. $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ нь $L \geq 0$ тогтмол бүхий Липшиц тасралтгүй.

Дээрх нөхцлүүд биелэх үед (QVI) бодлого нь цор ганц шийдтэй байдаг бөгөөд уг шийдийг олох дараах алгоритмыг санал болгосон.

Алгоритм:

$$\begin{cases} y^k := \text{proj}_{m(x^k)+K}(x^k - \lambda T(x^k)) \\ x^{k+1} = y^k + \lambda(T(x^k) - T(y^k)), \end{cases}$$

энд $\lambda > 0$ ба $\text{proj}_K : \mathbb{R}^n \rightarrow K$ нь $K \subseteq \mathbb{R}^n$ хоосон, битүү, гүдгэр олонлог дээрх проекцийн оператор. Тэмдэглэхэд хэрэв $m = 0$ бол энэ нь вариацийн тэнцэтгэл бишийг бодох Цэнгийн алгоритмд шилждэг. Нөгөө талаас

$$\text{proj}_{x+K}(y) = x + \text{proj}_K(y)$$

нөхцөл биелэх учир дээрх алгоритмыг

$$\begin{cases} y^k := m(x^k) + \text{proj}_K(x^k - \lambda T(x^k) - m(x^k)) \\ x^{k+1} = y^k + \lambda(T(x^k) - T(y^k)), \end{cases} \quad (2.1)$$

хэлбэрт бичиж болно. Энэ алгоритын хувьд нийлэлтийн үр дүн дараах байдлаар томъёолгодоно.

Теорем 1 (QVI) бодлогын хувьд (1) – (5) нөхцүүгүйд биелдэг ба $x^* \in K(x^*)$ уг бодлогын цор ганц шийд байг. Мөн дараах нөхцүүгүйд биелдэг гэжс үзье.

$$(i) \ lL < \rho,$$

$$(ii) \ (1 + t_1^2)l(1 + 2\lambda L + l) < 1 - (\lambda L)^2,$$

энд $t_1 := \frac{1+\lambda L+l(1+2\lambda L)+\sqrt{\Delta}}{2\lambda(\rho-lL)}$, $\Delta = (1+\lambda L+l(1+2\lambda L))+4l\lambda(1+\lambda L)(\rho-lL)$. Тэгвэл $x^0 \in \mathbb{R}^n$ анхны дөхөлтөөс эхлэн (2.1) алгоритмаар үүсгэгдэх дарааллын хувьд $q = q(l, L\rho, \lambda) \in (0, 1)$ тоо олдоод

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 + 2\lambda\rho\|y^k - x^*\|^2 \leq q\|x^k - x^*\|^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

нөхцөл хүчинтэй. Иймээс $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ дараалал нь шугаман нийлэлттэй бөгөөд $\{y^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ дараалал нь (QVI) бодлогын цор ганц шийд рүү хүчтэй нийцнэ.

2.2 Хамтын зааглалтай ерөнхийлсэн Нэшийн тэнцвэрийн загварын зэсийн зэх зээл дэх хэрэглээ

2.2.1 Сонгодог Нэшийн тэнцвэрийн загвар ба вариацийн тэнцэтгэл биш
Нэгэн төрлийн бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэдэг n үйлдвэр авч үзэх бөгөөд i -р үйлдвэрийн бүтээгдэхүүний үнэ p_i нь нийт үйлдвэрлэсэн тоо хэмжээ $\sigma = \sum_{i=1}^n x_i$. Хэрэв i -р үйлдвэрийн хувьд x_i бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэх зардлыг $h_i(x_i)$ -ээр тэмдэглэвэл, i -р үйлдвэрийн ашиг нь

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i p_i \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) - h_i(x_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

$X_i \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ -ээр i -р тоглогчийн стратегийн олонлогийг тэмдэглээд гүдгэр гэж үзье. Тоглогч бурийн хувьд бусад тоглогчдын стратегиас хамааралгүйгээр ашгаа хамгийн их байлгах зорилгыг тавих бөгөөд бүх тоглогчдын хувьд нэгэн зэрэг энэ зорилгыг хангахаар олдох цэгийг Нэшийн тэнцвэрийн цэг гэдэг. Математикийн хувьд энэ бодлогыг дараах байдлаар томъёолж болно.

$$f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{i-1}^*, y_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \leq f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), \quad \forall y_i \in X_i, \quad \forall i. \quad (2.2)$$

нөхцлийг хангах $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ цэгийг олох бодлогыг Нэшийн тэнцвэрийн бодлого гэдэг. Цаашид бид f_i , $i = 1, \dots, n$ ашгийн функцийг хотгор ба тасралтгүй дифференциачлагдах гэж үзнэ. Тэгвэл, тоглогч бурийн хувьд дээрх бодлого нь хотгорыг максимумчлах бөгөөд уг бодлогын шийд оновчтой байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь

$$-\langle \nabla_{x_i} f_i(x^*), x_i - x_i^* \rangle \geq 0, \quad \forall x_i \subseteq X_i, \quad (2.3)$$

хэлбэрт бичигдэнэ, энд $\nabla_z g(z)$ нь градиент вектор ба $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ гэж тодорхойлогдох н хэмжээст 2 векторын скаляр үржвэр.

Стратегийн олонлог X_i нь гүдгэр болон хожлын функц f_i -ийн хувьд тасралтгүй ба хотгор нөхцүүд биелдэг бол Нэшийн тэнцвэрийн цэг олдоно гэдгийг Rosen 1965 онд харуулсан байдаг. $F(x)(-\nabla_{x_1} f_1(x), \dots, -\nabla_{x_n} f_n(x))$ гэсэн тэмдэглэгээг оруулах замаар Нэшийн тэнцвэрийн бодлогыг Вариацын тэнцэтгэл биш гэж нэрлэгдэх

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X \quad (2.4)$$

нөхцлийг хангах x^* цэгийг олох эквивалент бодлогод шилжүүлдэг.

2.2.2 Хамтын зааглалттай ерөнхийлсэн Нэшийн тэнцвэрийн загвар

Ерөнхийлсэн Нэшийн тэнцвэрийн загвар (ЕНТЗ) нь Нэшийн тэнцвэрийн бодлогын өргөтгөл бөгөөд тоглогч бүрийн стратегийн олонлог нь бусад тоглогчдынхоо стратегиас хамаарна гэж үздэг. Энэ загварыг анх эдийн засагт Дебрю "Сошиал тэнцвэр" гэсэн нэрээр анх оруулсан гэж үздэг. Энэ судалгааны чиглэл нь сүүлийн жилүүдэд эрчимтэй судлагдаж байгаа бөгөөд Факкиней, Канцов нар 2010 онд судалгааны ажлуудын тоймыг хэвлүүлсэн. ЕНТЗ-ийн томъёоллыг авч үзье. Бид N тоглогчтой хамтач бус тоглоом авч үзье. $x_k \in \mathbb{R}^{n_k}$, $n_k \in \mathbb{N}$ нь k -р тоглогчийн стратеги ба $x := (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^n$, $n := \sum_{k=1}^N n_k$ ба x_{-k} -ээр k -р тоглогчоос ялгаатай бусад тоглогчдын стратегийг тэмдэглэе. $\theta_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, N$ нь k -р тоглогчийн зорилгын функц ба бэхлэгдсэн x_{-k} бүрийн хувьд $C_k(x_{-k})$ олонлог нь k -р тоглогчийн хувьд бусад тоглогчдын x_{-k} стратегиас хамаарсан стратегийн олонлог байна. Тэгвэл ЕНТЗ нь $k = 1, \dots, N$ тоглогч бүрийн хувьд

$$\theta_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{k-1}^*, y_k, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*) \geq \theta_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), \quad \forall y_k \in C_k(x_{-k}), \quad \forall k, \quad (2.5)$$

нөхцлийг хангахаар $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ векторыг олох бодлого юм. Хэрэв $C_k(x_{-k})$ олонлог нь

$$C_k(x_{-k}) = \{x_k \in X_k \mid g(x) \leq 0\}$$

хэлбэртэй өгөгдсөн бол хамтын зааглалттай бодлого гэж нэрлэдэг.

2.2.3 Зэсийн зах зээл дэх хэрэглээ ба вариацийн тэнцэтгэл бишийн томъёолол

Судалгааны хүрээнд тэг биш нийлбэртэй, N тоглогчтой, үл эвсэлдэх тоглоомын бодлогыг зэс экспортлогч улс орнуудын хувьд томъёолсон. Загварт БНХАУ-ын зэсийн зах зээлд нийлүүлэгч улсууд дахь зэсийн баяжмал экспортлогч уурхайнуудыг тоглогч агентаар авсан. Энэ судалгаа нь Трубигийн нүүрсний зах зээлд хэрэглэсэн Нэшийн тэнцвэрийн загварт үндэслэсэн бөгөөд Хятадын зах зээлийн эрэлттэй холбоотойгоор хамтын зааглалтыг нэмж тооцсоноор уг загвар нь Ерөнхийлсэн Нэшийн загварт шилжих болно. Ингэснээр эдийн засгийн судалгаанд ерөнхийлсэн Нэшийн тэнцвэрийн загварын нэгэн сонирхолтой хэрэглээг харуулсан. Хятадын зах зээлд Чили, Перу, Австрали, Монгол зэрэг орнууд зэс нийлүүлдэг байг. Өөрөөр хэлбэл, дээрх 4 улсын тоглогчтой ерөнхийлсэн Нэшийн тэнцвэрийн бодлогыг авч үзье. Тоглогч бүрийн шийдвэр гаргах хувьсагчид бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэл, хөрөнгө оруулалт ба эдгээр стратегиудаа зэрэг сонгоно гэж үзье. Тухайн зах зээлд тогтсон үнээр бүтээгдэхүүнээ борлуулж зардлаа тооцсоноор цэвэр ашгaa хамгийн их байлгах юм. Тэгвэл k -р тоглогчийн бодлого дараах хэлбэртэй байна. ($k = 1, \dots, 4$).

$$(Z_k) \quad \begin{aligned} & \max_{(x_{ki}, y_{ki})} \sum_{i=1}^{|M_k|} [x_{ki} P_k - C_{ki}^{var}(x_{ki}) - c_{ki}^{inv} y_{ki}] \\ & X_k = \{(x_{ki}, y_{ki}) : P_k = (a_k - b_k Q), \\ & x_{ki} - y_{ki} \leq cap_{ki}^0, \\ & y_{ki} \leq y_{ki}^{max}, \\ & Q = \sum_{k=1}^N x_k, \quad x_k = \sum_{i=1}^{|M_k|} x_{ki}, \\ & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 \leq Total, \\ & x_{ki}, y_{ki} \geq 0, \quad i = 1, \dots, |M_k|\}. \end{aligned}$$

Энд

M_k	k -р улсын зэсийн баяжмалын үйлдвэрүүдийн олонлог
$C_{ki}^{var}(x_{ki}) = (\tau_{ki} + v_{ki})x_{ki}$	Хувьсах зардал, (үйлдвэрлэлийн болон тээвэрлэлтийн)
$c_{ki}^{inv} y_{ki}$	хөрөнгө оруулалтын зардал
cap_{ki}^0	үйлдвэрлэлийн суурь хүчин чадал
y_{ki}^{max}	хөрөнгө оруулалтын дээд зааг
$\alpha_i, i = 1, 2, 3, 4$	i -р улсын Хятадын зах зээлд эзэлж буй хувь
$Total$	Хятадын импортын нийт хэмжээ (Total ≤ 1)

(VI) бодлогын хувьд улс бүрээр градиент векторыг тооцоолж гаргавал:
Чилийн зэсийн баяжмал экспортлогч 4 баяжуулах үйлдвэрийн хувьд::

$$\nabla f_1 = \left(\begin{array}{c} a_k - b_k Q - \tau_{1i} - v_{1i} + \sum_{i=1}^4 x_{1i}(-b_k) \\ -c_{1i} \end{array} \right)_{i=1}^4,$$

Перугийн 3 үйлдвэрийн хувьд:

$$\nabla f_2 = \left(\begin{array}{c} a_k - b_k Q - \tau_{2i} - v_{2i} + \sum_{i=1}^3 x_{2i}(-b_k) \\ -c_{2i} \end{array} \right)_{i=1}^3,$$

Австралийн 2 үйлдвэрийн хувьд:

$$\nabla f_3 = \left(\begin{array}{c} a_k - b_k Q - \tau_{3i} - v_{3i} + \sum_{i=1}^2 x_{3i}(-b_k) \\ -c_{3i} \end{array} \right)_{i=1}^2,$$

Монгол Улсын 2 үйлдвэрийн хувьд:

$$\nabla f_4 = \left(\begin{array}{c} a_k - b_k Q - \tau_{4i} - v_{4i} + \sum_{i=1}^2 x_{4i}(-b_k) \\ -c_{4i} \end{array} \right)_{i=1}^2.$$

гэдгийг тооцон дараах хувьсагч оруулъя::

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_8) : &= (x_{1i}, y_{1i}), \quad i = 1, \dots, 4, \\ (x_9, \dots, x_{14}) : &= (x_{2i}, y_{2i}), \quad i = 1, \dots, 3, \\ (x_{15}, \dots, x_{18}) : &= (x_{3i}, y_{3i}), \quad i = 1, \dots, 2, \\ (x_{19}, \dots, x_{22}) : &= (x_{4i}, y_{4i}), \quad i = 1, \dots, 2. \end{aligned}$$

Хүснэгт 2.1: Оролтын хувьсагчид

Country	Mines	Export	Investment
CHL	Escondida	x_{11}	y_{11}
	Collahuasi	x_{12}	y_{12}
	EI Teniente	y_{13}	y_{13}
	Los Pelambres	x_{14}	y_{14}
PER	Property	x_{21}	y_{21}
	Antamina	x_{22}	y_{22}
	Las Bambas	x_{23}	y_{23}
AUS	Prominent Hill	x_{31}	y_{31}
	Olympic Dam	x_{32}	y_{32}
MNG	Erdenet	x_{41}	y_{41}
	Oyu Tolgoi	x_{42}	y_{42}
IDN	Grasberg	x_{51}	y_{51}

БҮЛЭГ 3

Төлбөрийн чадварын зааглалттай даатгалын хураамжийн загвар

3.1 Нэг үет даатгалын загвар

I даатгагчтай n даатгуулагчтай даатгалын зах зээл авч үзье. Даатгуулагчид тухайн даатгалын компанидаа үргэлжлүүлэн даатгуулах эсвэл өрсөлдөгч даатгалын компани руу шилжиж даатгуулахаа өөрсдөө шийддэг байг.

Бид $(x_1, \dots, x_I) \in \mathbb{R}^I$ - ээр үнийн векторыг тэмдэглэе, энд x_j нь j -дүгээр даатгуулагчийн хураамж. Бүх даатгалын компаниуд хураамжаа тогтоосны дараа даатгуулагчид өөрсдийн даатгуулсан компанидаа үргэлжлүүлэн даатгуулах эсвэл өөр компани сонгено. Үүний дараа даатгалын компаниуд тухайн даатгалын жилд гарсан нөхөн олговрыг өөрийн даатгалын багцынхаа хүрээнд төлж барагдуулна.

Тухайн даатгалын жилд гарсан i -дүгээр даатгуулагчаас учрах боломжит хохиролыг Y_i -ээр тэмдэглэн Y_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ -үүдийг үл хамаарах нэгэн ижил тархалттай гэж үзье.

Энэ тохиолдолд j -дүгээр даатгагчид учрах нийт нэхэмжлэлийн хэмжээ $S_j(x) = \sum_{i=1}^{N_j(x)} Y_i$, энд $N_j(x)$ нь x үнийн вектор өгөгдсөн үеийн j -дүгээр даатгалын компанийн багц буюу даатгуулагчдын тоо.

n_j нь j -дүгээр даатгалын компанийн хугацааны эхэн дэх анхдагч даатгалын багц байг $\Theta/x \sum_{j=1}^I n_j = n$. Энэ тохиолдолд j -дүгээр даатгалын зорилгын (ашгийн) функц дараах хэлбэрээр илэрхийлэгдэнэ:

$$O_j(x) = \frac{n_j}{n} \left(1 - \beta_j \left(\frac{x_j}{m_j(x)} - 1 \right) \right) (x_j - \pi_j), \quad (3.1)$$

энд π_j нь j -дүгээр даатгуулагчийн хугарлын цэгийн хураамж ба $m_j(x)$ нь бусад даатгалын компаниудын дундаж хураамж

$$m_j(x) = \frac{1}{I-1} \sum_{k \neq j} x_k.$$

Даатгалын компаниуд дээрх зорилгын функцийг максимумчилахаас гадна бодлого боловсруулагчидын тогтоосон төлбөрийн чадварын зааглалтыг хангаж байх ёстой. j -дүгээр даатгалын компанийд харгалзах төлбөрийн чадвар ойролцоогоор дараах томъёо-гоор өгөгднө:

$$SCR_q \approx k_q \sigma(Y) \sqrt{n_j}.$$

Энэ тохиолдолд төлбөрийн чадварын функц доорх байдлаар тодорхойлогдоно:

$$g_j(x_j) = \frac{K_j + n_j(x_j - \pi_j)(1 - e_j)}{k_q \sigma(Y) \sqrt{n_j}} \geq 1,$$

энд e_j нь бохир хураамжид харгалзах зардлын хувь. Амьдралын бус даатгалын зах зээл дэх нэг-үет Нэшийн тэнцвэрийн загвар дараах байдлаар тавигдана:

$$\max_{x_j \in X_j} O_j(x), \quad j = 1, \dots, I,$$

энд

$$\begin{aligned} X_j &:= \{x_j \in [x, \bar{x}] \mid g_j(x_j) \geq 0\} \\ &= \{x_j \in [x, \bar{x}] \mid K_j + n_j(x_j - \pi_j)(1 - e_j) \geq k_q \sigma(Y) \sqrt{n}\}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

ба \underline{x} , \bar{x} ҮҮД нь хамгийн бага ба хамгийн их хураамжууд.

3.2 Нэг үет загварын өргөтгөл

t нь үеийн тоо байг. Нэг үетэй загварыг t -үетэй болгож өргөтгөхийн тулд даатгуулагчид тухайн үеийн эдийн засгийн нөхцөл байдалд үндэслэн шийдвэрээ гаргана гэж үзье. Өөрөөр хэлбэл, эдийн засаг сайжирвал даатгуулагчидийн даатгуулах сонирхол нэмэгдээ нэ. $z(k) \in \mathbb{R}^q$ нь k -дугаар үе дэх эдийн засгийн хүчин зүйл, $\gamma_{ij}(k) \in \mathbb{R}^q$ нь даатгуулагч i -ээс j -дүгээр даатгуулагч руу шилжихэд харгалзах эдийн засгийн параметрийн вектор ба даатгуулагчид даатгагч руу шилжих шилжилтийн магадлалын матриц доорх байдлаар тодорхойлогдоно гэж үзье:

$$P(k) = \begin{pmatrix} p_{1,1}(k) & p_{1,2}(k) & \cdots & p_{1,I}(k) & p_{1,I+1}(k) \\ p_{2,1}(k) & p_{2,2}(k) & \cdots & p_{2,I}(k) & p_{2,I+1}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{I,1}(k) & p_{I,2}(k) & \cdots & p_{I,I}(k) & p_{I,I+1}(k) \\ p_{I+1,1}(k) & p_{I+1,2}(k) & \cdots & p_{I+1,I}(k) & p_{I+1,I+1}(k) \end{pmatrix},$$

энд $p_{i,j}(k)$ нь харилцагч k -дугаар үед i -дүгээр даатгагчаас j -дүгээр даатгагч руу шилжих магадлал. $(I+1)$ -дугаар багана нь идэвхгүй төлөв буюу даатгуулаагүй харилцагчидад харгалзана. Шилжилтийн магадлал дараах байдлаар загварчлагдана:

$$p_{i,j}(k) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \sum_{l=1}^I \exp(\langle \gamma_{il}(k), z(k) \rangle)} & \text{if } j = I+1 \\ \frac{\exp(\langle \gamma_{ij}(k), z(k) \rangle)}{1 + \sum_{l=1}^I \exp(\langle \gamma_{il}(k), z(k) \rangle)} & \text{if } j \neq I+1, \end{cases}$$

энд $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаляр үржвэрийн оператор. Хэрэв эдийн засаг k -дугаар үед муудвал даатгуулагчид даатгуулах сонирхолгүй болох ба ингэснээр $p_{i,j}(k)$, $j = 1, \dots, I$ магадлалууд бууран $p_{i,I+1}$ магадлал өснө.

k -дугаар үед харгалзах j -дүгээр даатгалын компанийн багцын хэмжээ $N_j(k)$ нь үргэлжлүүлэн даатгуулж буй болон бусад даатгалын компаниудаас шилжин ирсэн даатгуулагчидадаас бүрдэнэ. Иймд

$$\begin{aligned} N_j(k) &= N_j(k-1)p_{j,j}(k) + \sum_{i=1, i \neq j}^{I+1} N_i(k-1)p_{i,j}(k) \\ &= \sum_{i=1}^{I+1} N_i(k-1)p_{i,j}(k), \end{aligned}$$

энд $N_j(0) = n_j$. r_f нь эрсдэлгүй хүү ба $v = \frac{1}{1+r_f}$ нь хямдруулалтын хүчин зүйл байг. Дутангийн ажилд (2013) үндэслэвэл, j -дүгээр даатгалын компани дараах зорилгын (ашгийн) функцийг максимумчлахаар зорих болно:

$$O_m^j(x) = \sum_{k=1}^m \frac{v^k N_j(k)}{n} \left(1 - \beta_j(k) \left(\frac{x_j^k}{m_j(x^k)} - 1 \right) \right) (x_j^k - \pi_j(k)), \quad (3.3)$$

энд $x = (x_1^T, \dots, x_I^T)^T$, $x_j = (x_j^1, \dots, x_j^m)^T$, $j = 1, \dots, I$, ба $m_j(x^k) = \frac{1}{I-1} \sum_{i \neq j} x_i^k$. j -дүгээр даатгуулагчид харгалзах төлбөрийн чадварын зааглалт дараах байдлаар томъёологдоно:

$$g_\ell^j(x_j) = \frac{K_j + \sum_{k=1}^{\ell} v^k N_j(k)(x_j^k - \pi_j(k))(1 - e_j(k))}{k_q \sigma(Y) \sqrt{\sum_{k=1}^{\ell} v^k N_j(k)}} - 1, \quad \text{for } \ell = 1, 2, \dots, m.$$

Иймд j , $j \in \{1, \dots, I\}$ дүгээр тоглогч бүрийн стратегийн олонлог

$$\begin{aligned} X_m^j : &= \{x_j \in [\underline{x}, \bar{x}]^m \mid g_\ell^j(x_j) \geq 0, \ell = 1, \dots, m\} \\ &= \left\{ x_j \in [\underline{x}, \bar{x}]^m \mid K_j + \sum_{k=1}^{\ell} v^k N_j(k)(x_j^k - \pi_j(k))(1 - e_j(k)) \right. \\ &\quad \left. \geq k_q \sigma(Y) \sqrt{\sum_{k=1}^{\ell} v^k N_j(k)}, \ell = 1, \dots, m \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

байна. m -үетэй загвард харгалзах [?]-тэй төстэй үр дүнгүүдийг өгье.

Өгүүлбэр 1 (3.3) зорилгын функцууд (3.4) төлбөрийн чадварын зааглалтуудтай I тоглогчтой m -үетэй даатгалин тоглоом нь цог ганц Нэшийн тэнцвэрийн цэгтэй байна.

Өгүүлбэр 2 x^* нь I тоглогч m -үетэй даатгалин тоглоомын тэнцвэрт хураамжс байг. Тэсвэл

1. хэрэв бүх төлбөрийн чадварын зааглалтууд идэвхитэй эсвэл идэвхигүй бол j -дүгээр тоглогч болон k -дугаар үе бүрийн хувьд харгалзах $x_j^{k*} \in [\underline{x}, \bar{x}]$ тэнцвэрт хураамжс параметрүүдээс дараах байдлаар хамаарна:

- (i) хугарлын цэгийн хураамж $\pi_j(k)$, төлбөрийн чадварын коэффициент k_q , хохирлын хэлбэлзэл $\sigma(Y)$, зардлын хувь $e_j(k)$, болон $k \geq 2$ хувьд эрсдэлгүй хүү r_f -гүйдээс эерэгээр
- (ii) мэдрэмжийн параметр $\beta_j(k)$, $k = 1$ үед капитал K_j болон $k \geq 2$ үед багцын хэмжээ $N_j(\ell)$, $\ell = 1, \dots, k$ -гүйдээс сөрөг хамаарна.

2. хэрэв бүх зааглалтын функцууд идэвхигүй бол тэнцвэрт хураамжс нь

$$M_\beta x^* = v,$$

шугаман тэгшигтгэлийн системийн шийд байна, энд

$$M_\beta = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix},$$

$$v = (\beta_1(1)\pi_1(1), \dots, \beta_I(1)\pi_I(1), \dots, \beta_1(m)\pi_1(m), \dots, \beta_I(m)\pi_I(m))^T,$$

ба

$$A_k = \begin{pmatrix} 2\beta_1(k) & -\frac{1+\beta_1(k)}{I-1} & \cdots & -\frac{1+\beta_1(k)}{I-1} \\ -\frac{1+\beta_2(k)}{I-1} & 2\beta_2(k) & \cdots & -\frac{1+\beta_2(k)}{I-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1+\beta_I(k)}{I-1} & -\frac{1+\beta_I(k)}{I-1} & \cdots & 2\beta_I(k) \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Хүснэгт 3.1: Scenario 1

Player	I			II			III		
Period	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$E(Y)$	1								
k_q	3								
r_f	0.05								
$\sigma(Y)$	10.488								
K_j	2807.190			2367.231			2006.917		
$\beta_j(k)$	3.0	3.5	3.0	3.8	3.9	3.8	4.6	5.6	4.6
$e_j(k)$	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
$\pi_j(k)$	1.10	1.10	1.10	1.117	1.117	1.117	1.083	1.083	1.083
$N_j(k)$	4500	4500	4500	3200	3200	3200	2300	2300	2300
equil/prem	1.544	1.472	1.544	1.511	1.463	1.510	1.471	1.406	1.471

Хүснэгт 3.2: Scenario 2

Player	I			II			III		
Period	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$E(Y)$	1								
k_q	3								
r_f	0.05								
$\sigma(Y)$	10.488								
K_j	2807.190			2367.231			2006.917		
$\beta_j(k)$	3.0	3.0	3.0	3.8	3.8	3.8	4.6	4.6	4.6
$e_j(k)$	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
$\pi_j(k)$	1.15	1.10	1.10	1.117	1.100	1.117	1.083	1.083	1.183
$N_j(k)$	4500	4500	4500	3200	3200	3200	2300	2300	2300
equil/prem	1.580	1.538	1.579	1.527	1.499	1.544	1.487	1.466	1.542

3.3 Тоон туршилт

Энэ хэсэгт Өгүүлбэр 2-д гарсан үр дүнг тоон туршилтаар баталж харуулъя. Бид гурван-үетэй гурван тоглогчтой тоглоом авч үзсэн.

a) *Scenario 1:*

Хүснэгт 3.1-д 2-дугаар үед бүх тоглогчдын мэдрэмжийн параметр өсөх үеийн үр дүнг харуулав. Энэ тохиолдолд тэнцвэрт хураамж зөвхөн 2-дугаар үед л өөрчлөгдсөн.

b) *Scenario 2:*

Энэ тохиолдолд 1-дүгээр үе дэх 1-дүгээр тоглогч болон 3-дугаар үе дэх 3-дугаар тоглогчийн хугарлын цэгийн хураамжийг өсгөж 2-дугаар үе дэх 2-дугаар тоглогчийн хугарлын цэгийн хураамжийг бууруулсан үеийн үр дүнг харуулав. Энэ тохиолдолд, 1 болон 3-дугаар тоглогчийн 1 болон 3-дугаар үеийн тэнцвэрт хураамж өсөн 2 дугаар тоглогчийн 2 дугаар үеийн тэнцвэрт хураамж буурсан. Бусад параметрүүдэд харгалзах мэдрэмжийн шинжилгээг диссертацаас харж болно.

БҮЛЭГ 4

Төлбөрийн чадварын зааглалттай банкны зээлийн хүүгийн загварууд

4.1 Төлбөрийн чадварын зааглалттай банкны загвар

Энэ хэсэгт бид төлбөрийн чадварын зааглалттай зээлийн хүүгийн Нэшийн тоглоом авч үзэх болно. Одоо загварынхаа талаар дэлгэрүүлж авч үзье. Зах зээлд зээлийн хүүгээрээ өрсөлддөг N тооны банкууд үйл ажиллагаа явуулдаг ба зээлдэгч бүр R тооны зээлийн зэрэглэлийн аль нэгэнд харьяалагддаг байг. i -дүгээр зээлийн зэрэглэлтэй зээлийн хувьд түүний дефолт болох магадлал эрсдэлийн хүчин зүйл (эдийн засгийн хүчин зүйл) Ψ -ийн нөхцөлд $p_i(\Psi)$ байг. $p_i(\cdot)$ нь аргументаараа эрс өсдөг функц гэж үзье. Энэ тохиолдолд эрсдэлийн хүчин зүйл өсвөл (эдийн засаг муудвал) зээлдэгчийн дефолт болох магадлал өсөх бол эрсдэлийн хүчин зүйл буурвал (эдийн засаг сайжирвал) зээлдэгчийн дефолт болох магадлал буурна. Мөн i -дүгээр зэрэглэлтэй зээлийн хувьд дефолт болсон нөхцөлд тухайн зээлээс учрах алдагдал (loss given default-LGD) Δ_i байг. $\Delta_{i\text{-г}} (0, 1]$ -д утгатай гэж үзнэ. Мөн n -дүгээр банкны хувьд i -дүгээр зэрэглэлтэй зээлийн нийт үлдэгдэл $L_{i,n}$ байсан ба n -дүгээр банкны хувьд $x_{i,n}$ нь i -дүгээр зэрэглэлтэй зээлийн хүү тус тус байг. Дутанг нарын болон Баттулга нарын [?] судалгааны ажлууд дээр үндэслэвэл n -дүгээр банк дараах хэлбэртэйгээр тодорхойлогдох татварын өмнөх цэвэр ашгийг максимумчилна:

$$O_n(x) = \sum_{i=1}^R L_{i,n} \left(1 - \beta_{i,n}^L \left(\frac{x_{i,n}}{m(x_{i,n})} - 1 \right) \right) (x_{i,n} - \pi_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi)), \quad (4.1)$$

Энд i -дүгээр зээлийн зэрэглэлтэй n -дүгээр банкны хувьд $\beta_{i,n}^L > 0$ нь хүүгийн мэдрэмжийн параметр, $\pi_{i,n}$ нь хугарлын цэгийн хүү, e_n нь зардлын хувь, $x = (x_1^T, \dots, x_N^T)^T$ нь бүх тоглогчдийн зээлийн хүү, $x_n = (x_{1,n}, \dots, x_{R,n})^T$ нь n -дүгээр банкны зээлийн зэрэглэлүүдтэй холбоотой хүүнүүд ба $m(z_{i,n}) = \frac{1}{N-1} \sum_{k \neq n} z_{i,k}$ нь бусад тоглогчдийн санал болгож буй хүүнүүдийн дундаж.

Төлбөрийн чадварын зааглалт нь эдийн засгийн хүндрэлийн үед хадгаламж эзэмшигчдийг хамгаалах зорилгоор тодорхой хэмжээний капиталыг банк хангаж байх шаардлага юм. Иймд (4.1) зорилгын функцийг максимумчилхаас гадна банк бодлого боловсруулагчдын тогтоосон төлбөрийн чадварын зааглалтыг хангах ёстой. Энэ ажлын хүрээнд Basel I, Basel II болон ES гэсэн гурван төрлийн төлбөрийн чадварын зааглалтуудыг авч үзэх ба эдгээр нь манай загварын гол онцлог юм.

n -дүгээр банкны хувьд i -дүгээр зээлийн рейтингтэй нийт $m_{i,n}$ тооны зээлдэгч байгаа гэж үзье. Уг зээлүүдийн хувьд k -дугаар зээлдэгч дефолт болвол 1 дефолт болоогүй бол 0-ийг авах дефолт индикаторийн санамсаргүй хэмжигдэхүүн $Y_{i,k,n}$ болон түүний зээлийн үлдэгдлийг илэрхийлэх $e_{i,k,n}$ өгөгдсөн байг. Энэ тохиолдолд k -дугаар зээлдэгч дефолт болох магадлал $\mathbb{P}(Y_{i,k,n} = 1 | \Psi) = p_i(\Psi)$, $k = 1, \dots, m_{i,n}$ болох ба зээлдэгч бүрийн зээлийн үлдэгдлүүдийн нийлбэр нийт зээлийн үлдэгдэл байна: $\sum_{k=1}^{m_{i,n}} e_{i,k,n} = L_{i,n}$. Иймд n -дүгээр

банкны зээлийн багцаас учрах санамсаргүй алдагдлын хэмжээ дараах хэлбэртэйгээр илэрхийлэгдэнэ:

$$Q_n := \sum_{i=1}^R \sum_{k=1}^{m_{i,n}} e_{i,k,n} \Delta_i Y_{i,k,n}.$$

Харин эрсдэлийн хүчин зүйл Ψ -ийн нөхцөлд дундаж алдагдлын хэмжээ

$$\mathbb{E}(Q_n|\Psi) := \sum_{i=1}^R \sum_{k=1}^{m_{i,n}} e_{i,k,n} \Delta_i \mathbb{E}(Y_{i,k,n}|\Psi) = \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i p_i(\Psi)$$

байна. Бид [?] (мөн [?]-г хар) ажил дээр үндэслэвэл (энэхүү ажлын хүрээндэх регуляр нөхцлүүд биелнэ гэж үзнэ), хэрэв зээлдэгчдийн тоо хүрэлцээтэй их бол алдагдлын санамсаргүй хэмжигдэхүүн Q_n -ийн α эрэмбийн квантилийн хувьд дараах ойролцоо томъёо биелнэ.

$$q_\alpha(Q_n) \approx \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i p_i(q_\alpha(\Psi)),$$

энд $q_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\}$ нь X санамсаргүй хэмжигдэхүүний α эрэмбийн квантиль ([?]-г хар). [?]-д зээлийн багцын алдагдлын харьцааны хувьд дээрх ойролцоо томъёотой төстэй томъёо гаргасан байдаг. [?] ажлыг зээлийн эрсдэлийн хувьд Basel II зөвлөмжийг боловсруулахад ашиглагдсан нөлөө бүхий ажил гэж үздэг. Энэ тохиолдолд n -дүгээр банкны хувьд Ψ нөхцөл дэх Basel II өөрийн хөрөнгийн хүрэлцээний зааглалт доорх хэлбэртэйгээр тодорхойлогдоно:

$$g_n^1(x_n) = K_n + \sum_{i=1}^R L_{i,n} (x_{i,n} - \pi_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi)) - \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i p_i(q_\alpha(\Psi)).$$

Basel I нь анх 1988 онд банкуудын зээлийн эрсдэлийг багасгах зорилгоор зээлүүдийг ангилалаас нь хамааруулан үлдэгдлээс нь тодорхой хувь тооцон нийт дүнгийн хэмжээ нь банкны капиталын 8%-аас их байхыг шаардсан хамгийн анхны зээлийн эрсдэлийн зохицуулалт байсан. FSI Survey судалгаанд харуулснаар Монгол улсыг оролцуулаад Basel II-ийн хэрэгжилтэнд идэвхгүй зарим улсууд байсан. Энэ шалтгаанаар Basel I зааглалтыг өөрсдийн судалгаанд оруулсан. Ψ нөхцөл дэх Basel I төлбөрийн чадварын зааглалт дараах байдлаар тодорхойлогдоно:

$$g_n^2(x_n) = K_n + \sum_{i=1}^R L_{i,n} (x_{i,n} - \pi_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi)) - c \sum_{i=1}^R L_{i,n} w_i,$$

энд c нь эрсдэлээр жигнэсэн активын хувь ба w_i нь i -дүгээр зээлийн рейтингтэй зээлийн хувьд эрсдэлийн жин.

Artzner нар санхүүгийн эрсдэлийн удирдлагад анх уялдсан эрсдэлийн хэмжээсийг (coherent risk measure) оруулж ирсэн. Алдагдлын санамсаргүй хэмжигдэхүүний квантилын тодорхойлолтоос VaR нь хувиргалтаар инвариант, эерэг нэгэн төрлийн, монотон болохыг харуулж болдог. Харин субаддитив чанар VaR-ын хувьд ерөнхий тохиодолд биелдэггүй. Гэвч Acerbi & Tasche нарын танилцуулсан Expected Shortfall нь уялдаатай эрсдэлийн хэмжээс байж чаддаг. $E(|X|) < \infty$ нөхцлийг хангасан X санамсаргүй хэмжигдэхүүний хувьд $\alpha \in (0, 1)$ итгэх түвшинд харгалзах Expected Shortfall дараах байдлаар тодорхойлогдоно:

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \mathbb{E}[XI_{\{X \geq q_\alpha(X)\}}] + q_\alpha(X)[1 - \alpha - \mathbb{P}(X \geq q_\alpha(X))] \right\},$$

энд I_A нь A үзэгдлийн индикатор функц.

Хэрэв бид зээлийн алдагдлын багцын квантилыг ойролцоогоор илэрхийлэхийн тулд expected shortfall-ийн

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 q_u(X) du$$

томъёог ашиглавал n -дүгээр банкны зээлийн багцын $\alpha \in (0, 1)$ итгэх түвшинд харгалзах Expected Shortfall-ын хувьд дараах ойролцоо томъёо биелнэ:

$$\text{ES}_\alpha(Q_n) \approx \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i \int_\alpha^1 p_i [q_u(\Psi)] du.$$

энд Лемма 2-оос

$$h_i(\alpha) := \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 p_i [q_u(\Psi)] du, \quad i = 1, \dots, R$$

ууд тасралтгүй өсөх функц болох нь мөрдөнө. Иймд n -дүгээр банкны хувьд Ψ нөхцөл дэх ES төлбөрийн чадварын зааглалт:

$$g_n^3(x_n) = K_n + \sum_{i=1}^R L_{i,n} (x_{i,n} - \pi_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi)) - \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i \int_\alpha^1 p_i [q_u(\Psi)] du.$$

Иймд n -дүгээр тоглогчийн $n \in \{1, \dots, N\}$ стратегийн олонлог Basel II, Basel I, and ES зааглалтын тохиолдлуудад дараахаар өгөгднө:

Basel II:

$$\begin{aligned} X_n^1 &= \left\{ x_n \in \prod_{i=1}^R [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \mid g_n^1(x_n) \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ x_n \in \prod_{i=1}^R [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \mid K_n + \sum_{i=1}^R L_{i,n} (x_{i,n} - \pi_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi)) \geq 0 \right\} \\ &\geq \left\{ x_n \in \prod_{i=1}^R [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \mid \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i p_i(q_\alpha(\Psi)) \geq 0 \right\}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

Basel I:

$$\begin{aligned} X_n^2 &= \left\{ x_n \in \prod_{i=1}^R [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \mid g_n^2(x_n) \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ x_n \in \prod_{i=1}^R [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \mid K_n + \sum_{i=1}^R L_{i,n} (x_{i,n} - \pi_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi)) \geq 0 \right\} \\ &\geq \left\{ x_n \in \prod_{i=1}^R [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \mid c \sum_{i=1}^R L_{i,n} w_i \geq 0 \right\}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

ES:

$$\begin{aligned} X_n^3 &= \left\{ x_n \in \prod_{i=1}^R [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \mid g_n^3(x_n) \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ x_n \in \prod_{i=1}^R [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \mid K_n + \sum_{i=1}^R L_{i,n} (x_{i,n} - \pi_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi)) \geq 0 \right\} \\ &\geq \left\{ x_n \in \prod_{i=1}^R [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \mid \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i \int_\alpha^1 p_i [q_u(\Psi)] du \geq 0 \right\}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

энд $i = 1, \dots, R$ -ийн хувьд $\underline{x}_i, \bar{x}_i$ нь i -дүгээр зээлийн зэрэглэлтэй зээлийн хүүгийн хамгийн бага, хамгийн их утгууд. Энэхүү хамгийн бага, хамгийн их зээлийн хүүнүүдийг бодлого боловсруулагчид тогтоох (зарим улсууд зээлийн хүүгийн тааз тогтоосон байдаг) боломжтой. (4.2) – (4.4) тэгшигтгэлүүдийн хувьд $\sum_{i=1}^R L_{i,n}(x_{i,n} - \pi_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi))$ нь n -дүгээр банкны капиталын өөрчлөлтийг илэрхийлэх ба n -дүгээр банк өөрийн зээлийн олгох үйл ажиллагааныхаа дараа төлбөрийн чадвартай байх баталгааг өгнө. ES зааглалттай банкны салбар дахь загварыг тодорхойлохын тулд бидэнд дараах Леммүүдийн үр дүн хэрэгтэй.

Лемма 1 Ψ нь бодит утгатай санамсаргүй хэмжсигдэхүүн, $p : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ эрс өсдөг фүнки, $f_\Psi(\alpha) := (1 - \alpha)^{-1} \{ \mathbb{E}[p(\Psi) I_{\{\Psi \geq q_\alpha(\Psi)\}}] + p[q_\alpha(\Psi)] (1 - \alpha - \mathbb{P}(\Psi \geq q_\alpha(\Psi))) \}$ байг. Тэгвэл дараах үр дүн биелнэ:

$$f_\Psi(\alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 p[q_u(\Psi)] du.$$

Лемма 2 Ψ нь бодит утгатай санамсаргүй хэмжсигдэхүүн ба $p : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ нь эрс өсдөг фүнки байг. Тэгвэл $f_\Psi(\alpha)$ тасралтгүй өсдөг фүнки байна.

Төлбөрийн чадварын зааглалттай зээлийн хүүгийн Нэшийн загвар нь n -дүгээр тоглогч бүрийн хувьд

$$\begin{aligned} (\text{NEP}_i) \quad O_n(x) &\longrightarrow \max \\ \text{s.t. } x_n &\in X_n^i, \quad i = 1, 2, 3, \quad x_n = (x_{1,n}, \dots, x_{R,n})^T \end{aligned}$$

байх $x = (x_1^T, \dots, x_N^T)^T$ цэгийг олохоор тавигдана. Одоо тэнцвэрт зээлийн хүү оршин байх болон мэдрэмжийн шинжилгээний талаарх дараах үр дүнгүүдийг авч үзье.

Өгүүлбэр 3 (4.1)-ээр тодорхойлогдох зорилгын функцүүд, (4.2) эсвэл (4.3) эсвэл (4.4)-ээр тодорхойлогдох төлбөрийн чадварын зааглалтуудтай N тоглогчтой банкны тоглоом нь шийдтэй бөгөөд цор ганц Нэшийн хүүгийн тэнцвэрийн цэгтэй байна.

Теорем 2 x^* нь N тоглогчтой Basel II банкны тоглоомын тэнцвэрт зээлийн хүүнүүд байг. Тэгвэл,

1. Basel II өөрийн хөрөнгийн хүрэлцээний зааглалтын нөхцөлд n -дүгээр тоглогчид харгалзах зээлийн тэнцвэрт $x_{k,n}^* \in]\underline{x}_k, \bar{x}_k[$ нь загварын параметрүүдээс доорх байдлаар хамаарна:

- (i) хугарлын цэгийн $x_{i,n}$, банкны зардлын хувь e_n , дефолт болоход банкинд учрах алдагдлын хувь Δ_i , хольцын хувьсагч Ψ ба итгэх түвшин α -аас эерэгээр хамаарах бол
- (ii) мэдрэмжийн параметр $\beta_{i,n}^L$ болон капитал K_n -ээс сөргөөр хамаарна.

2. Хэрэв өөрийн хөрөнгийн хүрэлцээний зааглалт идэвхигүй бол тэнцвэрт хүү нь дараах систем тэгшигтгэлийн шийд байна:

$$M_\beta x^* = v,$$

энд

$$M_\beta = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_R \end{pmatrix},$$

$$v = (\beta_{1,1}^L[\pi_{1,1} + e_1 + \Delta_1 p_1(\Psi)], \dots, \beta_{1,N}^L[\pi_{1,N} + e_N + \Delta_1 p_1(\Psi)], \dots, \beta_{R,1}^L[\pi_{R,1} + e_1 + \Delta_R p_R(\Psi)], \dots, \beta_{R,N}^L[\pi_{R,N} + e_N + \Delta_R p_R(\Psi)])^T$$

ба

$$A_k = \frac{1}{N-1} \begin{pmatrix} 2(N-1)\beta_{k,1}^L & -(1+\beta_{k,1}^L) & \cdots & -(1+\beta_{k,1}^L) \\ -(1+\beta_{k,2}^L) & 2(N-1)\beta_{k,2}^L & \cdots & -(1+\beta_{k,2}^L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(1+\beta_{k,N}^L) & -(1+\beta_{k,N}^L) & \cdots & 2(N-1)\beta_{k,N}^L \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, R.$$

Тэмдэглэл 1

- (i) Хэрэв $x_{k,n}^* = \underline{x}_k$ эсвэл $x_{k,n}^* = \bar{x}_k$ бол тэнцвэрт зээлийн хүү загварын параметрүүг дээс хамаарахгүй байна.
- (ii) Basel I төлбөрийн чадварын зааглалттай Нэшийн тоглоомын хувьд Basel II-ийн үр дүнгүүд биелэхээс гадна нэмээд уг тоглоомын тэнцвэрт зээлийн хүү нь эрсдэлээр эсигнэсэн активын хуеc с болон эрсдэлийн ижин w_i -ээс эрэгээр хамаарна.
- (iii) ES төлбөрийн чадварын зааглалттай Нэшийн тоглоомын хувьд Лемма 2 ёсоор $h_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, R$ -үүд өсдөг тасралтгүй функцууд тул Теорем 2-тэй ижил үр дүн биелнэ.
- (iv) Хэрэв Ψ нь дурын санамсаргүй хэмжсигдэхүүн ба $p_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, R$ -үүд өсдөг функцууд бол монотон функцын дифференциалын Лебегийн теорем ёсоор (see [?]), $q_i(\cdot)(\Psi)$ болон $r_i(\cdot)$ тоологдом тооны үл дифференциаллагдах цэгүүдтэй. Иймд тэнцвэрт зээлийн хүү нь холыцуун санамсаргүй хэмжсигдэхүүн Ψ болон итгэх түвшин α -аас бараг хaa ч эерэг хамаарах ба бусад параметрүүдийн хувьд Теорем 2-тэй ижил үр дүн биелнэ.
- (v) Дээр авч үзсэн загваруудыг олон-үетэй загвар луу өргөтгөх боломжтой.

Тэмдэглэл 2 Дээр тодорхойлсон зээлийн хүүний өрсөлдөөний загварыг зээл болон хадгаламжийн хүүний өрсөлдөөний загвар руу шууд өргөтгөж болно. Тухайлбал, банкны зах зээлд нийт S тооны хадгаламжийн бүтээгдэхүүн (харилцах, хугацаагүй хадгаламжс гэх мэт) оршин байдаг, j -дүгээр хадгаламжийн бүтээгдэхүүний хэмжээ $D_{j,n}$ ба харгалзах хүү нь $y_{j,n}$ байг. Тэгсэл

$$\begin{aligned} O_n(x, y) &= \sum_{i=1}^R L_{i,n} \left(1 - \beta_{i,n}^L \left(\frac{x_{i,n}}{m(x_{i,n})} - 1 \right) \right) (x_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^S D_{j,n} \left(1 + \beta_{j,n}^D \left(\frac{y_{j,n}}{m(y_{j,n})} - 1 \right) \right) y_{j,n}, \end{aligned}$$

энд $\beta_{j,n}^D > 0$ нь хадгаламжийн хүүний мэдрэмжийн параметр, $y = (y_1^T, \dots, y_N^T)^T$, $y_n = (y_{1,n}, \dots, y_{S,n})^T$, $n = 1, \dots, N$. Энэ тохиолдолд Ψ нөхцөл дэх Basel II төлбөрийн чадварын зааглалт доорх байдлаар өгөгдөнө.

$$g_n^1(x_n, y_n) = K_n + \sum_{i=1}^R L_{i,n} (x_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi)) - \sum_{j=1}^S D_{j,n} y_{j,n} - \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i p_i(q_\alpha(\Psi)).$$

Энэхүү зээл хадгаламжийн хүүгийн Нэшийн тоглоом нь цор ганц тэнцвэрийн цэгтэй ба мэдрэмжийн шинжисүйгээ нь төстэй байдлаар хийгдэнэ. Хэрэв бодлого боловсруулагчид зээлийн хүүгийн тааз (дээд хязгаар) тогтоохыг хүсээж байгаа бол тэд энэ загварыг ашиглан оновчтой зээл хадгаламжийн хүүгийн хэмжээг тогтоон энэхүү шинэ таазын нөлөөг урьдчилан мэдэржс чадна.

Тэмдэглэл 3 O_n хөжсүүлийн функцуу X_n^1 эсвэл X_n^2 эсвэл X_n^3 стратегийн олонлогтой нэг лидер, $N=1$ дагажтай банкны Стакелбергийн тоглоомын хувьд Стакелбергийн тэнцвэр оршин байхыг харуулж болно.

4.2 Тоон туршилт

Энэ хэсэгт бид өмнөх хэсэгт тодорхойлсон Теорем 2, Теорем 2-ийн үр дүнгүүд болох мэдрэмжийн шинжилгээг Монголын том, дунд, жижиг банкуудын төлөөлөл 3 банкны хувьд хийсэн болно. Сонгон авсан гурван банкны хувьд загвард ашиглагдах 2018 оны IV улирлын үзүүлэлтүүдийг Хүснэгт 2.1-д харуулав. Энд MS_n нь банкны системийн нийт зээлийн үлдэгдэлд сонгон авсан банкуудын эзлэх зах зээлийн хувь оролцоо, L_n нь цэвэр зээлийн үлдэгдэл, K_n нь өөрийн хөрөнгө, K_n/L_n нь өөрийн хөрөнгө зээлийн харьцаа, CAR% нь эрсдэлээр жигнэсэн активын өөрийн хөрөнгөд эзлэх хувь, RWA нь өөрийн хөрөнгийг ЭЖА%-д хувааж тодорхойлогдсон эрсдэлээр жигнэсэн активын дүн, $\pi_{i,n}$ нь зээлийн хүүгийн орлогын нийт зээлийн үлдэгдэлд эзлэх хувь, e_n нь хүүгийн бус орлого, хүүгийн бус зардлын ялгаварыг цэвэр зээлд харьцуулсан харьцаа.

Хүснэгт 4.1: Сонгон авсан 3 банкны 2018 оны IV улирлын санхүүгийн үзүүлэлтүүд, сая USD

	MS_n	L_n	K_n	K_n/L_n	CAR%	RWA	$\pi_{i,n}$	e_n
Bank 1	18.4%	1,176.3	197.1	16.76%	14.60%	1,350.3	10.58%	1.50%
Bank 2	9.1%	663.2	78.7	11.87%	15.63%	503.8	11.80%	3.17%
Bank 3	2.5%	145.2	30.6	21.10%	17.41%	176.0	12.12%	2.09%

Одоо загварын суурь параметруүдийг тодорхойльё. Сонгосон банкуудын зээлийн багцын талаар мэдээлэл байхгүй тул нийт зээлийн үлдэгдлийн $s_1 = 30\%$ -г BBB зэрэглэлтэй, $s_2 = 40\%$ -г BB зэрэглэлтэй, $s_3 = 30\%$ -г B зэрэглэлтэй зээлдэгчид тус тус бүрдүүлнэ гэж таамагласан. Банкуудын өөрийн хөрөнгийг үржих тогтмолыг $K = 1$ -ээр, зээлдэгчдийн банкуудын санал болгож буй зээлийн хүүнд үзүүлэх мэдрэмжийн коэффициентүүдийг бүх банкуудыг хувьд $\beta_{1,n} = 4.5$, $\beta_{2,n} = 4$, $\beta_{3,n} = 3$ -аар авсан. Зардлын хувийг Хүснэгт 4.1-ийн 7-дугаар баганы утгаар авсан. $\Theta/x e_1 = 1.50\%$, $e_2 = 3.17\%$, $e_3 = 2.09\%$. Хугарлын цэгийн хүүг Хүснэгт 4.1-ийн 6-дугаар баганы утгаар авсан. $\Theta/x \pi_{i,1} = 10.58\%$, $\pi_{i,2} = 11.80\%$, $\pi_{i,3} = 12.12\%$, $i = 1, 2, 3$.

Эдийн засгийн нөхцлийн хувьсагч Ψ -ийн хувьд суурь тохиолдолд харгалзах утгыг нь түүний нөхцөлт магадлалын утга нь нөхцөлт бус магадлалтай тэнцүү байх утгаар авсан. Итгэх түвшин болон дефолт болсон нөхцөлд зээлээс алдах алдагдлын хувиудыг $\alpha = 99.9\%$, $\Delta_i = 40\%$, $i = 1, 2, 3$ -аар авсан. Бүх банк, бүх зээлийн зэрэглэлийн хувьд харгалзах зээлийн хүүнүүдийг зааглалтгүй гэж үзсэн. Энэ тохиолдолд, тухайлбал, ES-ийн хувьд n , $n = 1, 2, 3$ -дүгээр банкны стратегийн олонлог $X_n^3 = \{x_n \in \mathbb{R}^R \mid g_n^3(x_n) \geq 0\}$. Суурь тохиолдолд харгалзах бүх параметрийн утгуудыг Хүснэгт 4.2-ийн эхний багананд харуулав.

Хүснэгт 4.2-ийн BIS-II₁ багананд суурь тохиолдолд харгалзах Нэшийн тэнцвэрийг харуулсан. Энд $x_{i,n}^*$ нь n -дүгээр банкны i -дүгээр зээлийн зэрэглэлтэй зээлийн хүүгийн Нэшийн тэнцвэрийг илэрхийлнэ. Бүх зээлийн зэрэглэлүүдийн хувьд LGD 50%-аар өссөн үед харгалзах зээлийн хүүгийн тэнцвэрийг BIS-II₂ багананд харуулав. BIS-II₂-тэй BIS-II₁-ийг харьцуулбал BIS-II₂ баганын Нэшийн тэнцвэр өссөн нь харагдана. BIS-II₃ багананд 1-дүгээр банкны зардал 1%-аар өссөн 2-дугаар банкны зардал 1%-аар буурсан үеийн тэнцвэрт хураамжийг үзүүлсэн. BIS-II₄ багананд бүх банкны хувьд BBB зэрэглэлтэй зээлийн хүүгийн мэдрэмж 1-ээр В зэрэглэлтэй зээлийн хүүгийн мэдрэмж 0.5-аар буурах үеийн үр дүнг харуулсан. Хэрэв суурь тохиолдлын хугарлын цэгийн хүүг 1%-аар өсгөвөл (бууруулбал) BIS-II₅ (BIS-II₆) багана гарна. Хүснэгт 4.2-ийн бүх үр дүнгүүд Теорем 2-тэй нийцтэй байна. Бусад параметруүдийн мэдрэмжийн шинжилгээ болон ES, Basel I

төлбөрийн чадварын зааглалтуудад харгалзах мэдрэмжийн шинжилгээг диссертациын ажлаас харж болно.

Хүснэгт 4.2: BIS-II Төлбөрийн чадварын зааглалттай Нэшийн тэнцвэрт хүү

	BIS-II ₁	BIS-II ₂	BIS-II ₃	BIS-II ₄	BIS-II ₅	BIS-II ₆
$s_1-s_2-s_3\%$	30-40-30	30-40-30	30-40-30	30-40-30	30-40-30	30-40-30
K	1	1	1	1	1	1
β	4.5-4-3	4.5-4-3	4.5-4-3	5.5-4-2.5	4.5-4-3	4.5-4-3
$e\%$	1.5-3.2-2.1	1.5-3.2-2.1	2.5-2.2-2.1	1.5-3.2-2.1	1.5-3.2-2.1	1.5-3.2-2.1
π	0	0	0	0	1%	-1%
Ψ	base	base	base	base	base	base
α	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%
Δ	40%	60%	40%	40%	40%	40%
$x_{1,1}^*$	0.1716	0.1722	0.1754	0.1628	0.1845	0.1587
$x_{2,1}^*$	0.1819	0.1843	0.1857	0.1819	0.1952	0.1685
$x_{3,1}^*$	0.2267	0.2400	0.2304	0.2526	0.2417	0.2117
$x_{1,2}^*$	0.1827	0.1833	0.1789	0.1739	0.1955	0.1698
$x_{2,2}^*$	0.1929	0.1953	0.1891	0.1929	0.2062	0.1796
$x_{3,2}^*$	0.2375	0.2508	0.2338	0.2633	0.2525	0.2225
$x_{1,3}^*$	0.1798	0.1804	0.1798	0.1710	0.1926	0.1669
$x_{2,3}^*$	0.1900	0.1924	0.1900	0.1900	0.2033	0.1767
$x_{3,3}^*$	0.2347	0.2480	0.2347	0.2605	0.2497	0.2197

БҮЛЭГ 5

Нийлмэл Нэгэн Төрлийн Бус Пуассоны Процесс Дээр Суурисан Стохастик DDM

5.1 Аргачлал: Нийлмэл Нэгэн Төрлийн Бус Пуассоны Процесс

$[0, \infty)$ дээр тодорхойлогдсон f функцийн хувьд бид дараах тэмдэглэгээг оруулъя:

$$f(s, t) := f(t) - f(s), \quad 0 \leq s < t < \infty.$$

$N(t)$ нь $\mu(t)$ дунджийн функцтэй Пуассоны процесс (Mikosch [?]) ба $Y_1^{(j)}, Y_2^{(j)}, \dots, j = 1, \dots, n+1$ нь нэгэн ижил тархалттай санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүдийн дараалал байг. Энд $Y_1^{(1)}, Y_2^{(1)}, \dots, Y_1^{(n+1)}, Y_2^{(n+1)}, \dots$ санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд нь өөр хоорондоо хамааралгүйгээс гадна Пуассоны процесс $N(t)$ -ээс мөн хамааралгүй. Ирээдүйн цаг хугацаа $n+1$ үед хуваагдсан ба хуваалтууд нь $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = \infty$ байг. Энэ тохиолдолд эхний үе $0-t_1$, хоёрдугаар үе $(t_1+1)-t_2$, гэх мэт үргэлжлэх ба $(n+1)$ дүгээр үе (t_n+1) -ээс төгсгөлгүй хугацааг хамарна.

5.1.1 Ноогдол ашиг

Компани өөрийн амьдралын мөчлөгийнхөө хугацаанд янз бүрийн амжилт уналтыг дайран гарах ба энэ хугацаанд ноогдол ашиг ч мөн янз бүрийн өсөлтийн чиг хандлагыг үзүүлнэ. Хэрэв компанийн ноогдол ашгийн төлбөрийг графикаар дүрслэвэл (1) ноогдол ашиг тогтмол түвшинд хадгалагдах хугацаа санамсаргүй (2) ноогдол ашгийн үсрэлтийн хэмжээ санамсаргүй болох нь харагддаг. Иймд ирээдүйн ноогдол ашгийн динамикийг нийлмэл нэгэн төрлийн Пуассоны процессоор загварчлах нь үндэслэлтэй загварчлал болно.

j -дүгээр үед харгалзах нийлмэл нэгэн төрлийн бус Пуассоны процесс дараах тэгшигтгэлээр өгөгднө:

$$Q^{(j)}(t) := \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, n+1.$$

Хэдийгээр $Q^{(j)}(t)$ дэх үсрэлт $N(t)$ -тэй зэрэг хугацаанд явагдах боловч $N(t)$ дэх үсрэлтийн хэмжээ үргэлж 1 байдаг бол $Q^{(j)}(t)$ дэх үсрэлтийн хэмжээ санамсаргүй байна. $Q^{(j)}(t)$ -ийн хувьд эхний үсрэлтийн хэмжээ $Y_1^{(j)}$, хоёр дахь үсрэлтийн хэмжээ $Y_2^{(j)}$ гэх мэт. Бид $t_{j-1} < t \leq t_j$ нөхцлийг хангасан t -г бэхэльье. Бид j -дүгээр үеийн хувьд s хугацаанаас t хугацааны хоорондох ноогдол ашгийн өсөлтийг дараах нийлмэл нэгэн төрлийн бус

Пуассоны процессоор загварчилъя:

$$d_t - d_s = Q^{(j)}(s, t] = \sum_{i=N(s)+1}^{N(t)} Y_i^{(j)},$$

энд $j = 1, \dots, (n+1)$, $a, b \in \mathbb{Z}_+$, $a < b$ хувьд $\sum_{i=b}^a Y_i^{(j)} = 0$ гэж үзнэ. Тэгвэл t хугацаандах ноогдол ашиг дараах тэгшитгэлээр өгөгднө:

$$\begin{aligned} d_t &= d_0 + Q^{(1)}(t_1) + Q^{(2)}(t_1, t_2] + \dots + Q^{(j-1)}(t_{j-2}, t_{j-1}] + Q^{(j)}(t_{j-1}, t] \\ &= d_0 + \sum_{i=1}^{N(t_1)} Y_i^{(1)} + \sum_{i=N(t_1)+1}^{N(t_2)} Y_i^{(2)} + \dots + \sum_{i=N(t_{j-2})+1}^{N(t_{j-1})} Y_i^{(j-1)} + \sum_{i=N(t_{j-1})+1}^{N(t)} Y_i^{(j)}. \end{aligned}$$

5.1.2 Дефолт болох магадлал

Энэ хэсэгт бид компани дефолт болох санамсаргүй хугацаа болон хөрөнгө геометр Броуны хөдөлгөөнд захирагдсан, өр төлбөр дефолт босго тохиолдолд бүтцийн загвар (Merton [1974] анхны ажил) ашиглан дефолт болох магадлалыг ойролцоогоор илэрхийлэх болно.

$\tau \in \mathbb{N}$ нь компани дефолт болох хугацаа ба $Y_1^{(1)}, Y_2^{(1)}, \dots, Y_1^{(n+1)}, Y_2^{(n+1)}, \dots$ санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд болон Пуассоны процесс $N(t)$ -ээс үл хамаарах байг. t_i , $1 \leq i \leq N$ нь дискретчлэлийн хугацаа ба $t_0 = 0$, $\delta_i = t_i - t_{i-1}$, $1 \leq i \leq N$ байг. Мөн B_i нь t_i хугацаандах дефолт босго буюу өр төлбөр ба $V(t)$ нь t хугацаандах хөрөнгө байг. Бид t_i хугацаан дахь хөрөнгө $V(t_i)$ өр төлбөр B_i -ээс бага болох магадлал буюу дефолт болох магадлалыг ойролцоогоор илэрхийлнэ. $V(t)$ дараах тэгшитгэлээр өгөгдөх геометр Броуны хөдөлгөөнд захирагдаг байг:

$$dV(t) = \mu V(t)dt + \sigma V(t)dW(t)$$

энд $\mu \in \mathbb{R}$ and $\sigma > 0$. Энэ тохиолдолд t_1 хугацаанд дефолт болох магадлал

$$q_1 = \Pr(V(t_1) \leq B_1) = \Phi\left(\frac{\ln(B_1/V(0)) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta_1}{\sigma\sqrt{\delta_1}}\right),$$

энд Φ нь нормал тархалтын функц. t_1, \dots, t_{N-1} хугацаанд компани дефолт болоогүй боловч t_N хугацаанд дефолт болох магадлал

$$\begin{aligned} q_N &= \Pr(V(t_1) > B_1, V(t_2) > B_2, \dots, V(t_{N-1}) > B_{N-1}, V(t_N) \leq B_N) \\ &= \int_{B_{N-1}}^{\infty} \Phi\left(\frac{\ln(B_N/u) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta_N}{\sigma\sqrt{\delta_N}}\right) f_{N-1}(u)du, \end{aligned}$$

энд

$$f_N(x) = \int_{B_{N-1}}^{\infty} f_{N-1}(u) \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi\delta_N}} \exp\left\{-\frac{[\ln(x/u) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta_N]^2}{2\sigma^2\delta_N}\right\} du$$

ба

$$f_1(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi\delta_1}} \exp\left\{-\frac{[\ln(x/V(0)) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta_1]^2}{2\sigma^2\delta_1}\right\}.$$

$V(t)$ Броуны хөдөлгөөнд захирагдана гэсэн тохиолдолд Hull and White [?] нар дээрхтэй төстэй үр дүнг гарган авсан байдаг. Хуваалтын цэгүүд болох t_i , $1 \leq i \leq N$ -г ихэсгэх замаар дефолт болох магадлалыг хангалттай ойролцоогоор илэрхийлж болно. K нь хүрэлцээтэй их тоо, $N-1 = (s-1)K$, $t_1 = 1/K, t_2 = 2/K, \dots, t_{N-1} = s-1, t_N = s, s, K \in \mathbb{N}$ байг. Тэгвэл дефолт болох магадлал дараах байдлаар ойролцоогоор илэрхийлэгдэнэ:

$$\Pr(\tau = s) \approx \Pr(V(1/K) > B_1, V(2/K) > B_2, \dots, V(s-1) > B_{(s-1)K}, V(s) < B_{(s-1)K+1}).$$

5.1.3 Хувьцааны санамсаргүй үнэ

Энэ хэсэгт бид хувьцааны санамсаргүй үнийг загварчлах болно. Үүнийгээ ашиглан хувьцааны санамсаргүй үнийн нөхцөлт болон нөхцөлт бус тархалтын функцын томъёог гаргана. Эдгээр тархалтын функцуудын томъёо нь практикт шууд ашиглахад хэт төвөгтэй учраас тархалтын функцуудыг ойролцоогоор илэрхийлэхийн тулд хувьцааны санамсаргүй үнийн моментийг томъёонуудыг гаргах болно. Энэ шалтгаанаар дараах тэмдэглэгээг ашиглай:

$$F(s) := \frac{1}{k(1+k)^{s-t-1}},$$

энд k хувьцаанаас шаардаж буй өгөөж. Бид t хугацаанаас өмнө дефолт болоогүй гэж үзье. Тэгвэл хувьцааны санамсаргүй үнийн хувьд дараах өгүүлбэр биелнэ.

Өгүүлбэр 4 *Хэрэв дефолт i дүгээр үед болсон (өөрөөр хэлбэл $t_{i-1} < \tau \leq t_i$) бол t хугацаан дахь хувьцааны санамсаргүй үнэ дараах томбёогоор өгөгдөнө:*

$$\begin{aligned} P_t &= F(\tau, t+1]d_t + \sum_{m=t+1}^{t_j} F(\tau, m]Q^{(j)}(m-1, m] \\ &+ \sum_{m=t_j+1}^{t_{j+1}} F(\tau, m]Q^{(j+1)}(m-1, m] + \cdots + \sum_{m=t_{i-1}\vee t+1}^{\tau-1} F(\tau, m]Q^{(i)}(m-1, m], \end{aligned}$$

энд $a \vee b = \max(a, b)$.

Тархалтын Функцууд

Дараагийн алхамд бид хувьцааны санамсаргүй үнийн тархалтын функцийг тооцоолно. Тархалтын функц мэдэгдэж буй үед бид хувьцааны онолын үнэ, хувьцааны ханинийн итгэх завсар гэх мэт үзүүлэлтүүдийг тооцоолох боломжтой. Дараах тэмдэглэгээнүүдийг оруулж ирье: $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{Z}_+$, $\ell = j+1, \dots, i$ хувьд

$$\begin{aligned} Q_s^{(\ell)}(z_a : z_b) &:= \sum_{m=a+1}^b F(s, m] \sum_{i=z_{m-1}+1}^{z_m} Y_i^{(\ell)}, \\ R_s[z_{t_1}, z_{t_2}, \dots, z_{t_{j-1}}, z_t] &:= F(s, t+1] \left\{ d_0 + \sum_{i=1}^{z_{t_1}} Y_i^{(1)} + \sum_{i=z_{t_1}+1}^{z_{t_2}} Y_i^{(2)} + \cdots + \sum_{i=z_{t_{j-2}}+1}^{z_{t_{j-1}}} Y_i^{(j-1)} + \sum_{i=z_{t_{j-1}}+1}^{z_t} Y_i^{(j)} \right\}. \end{aligned}$$

Тэгвэл хувьцааны санамсаргүй үнийн нөхцөлт тархалтын хувьд дараах томъёо биелнэ

$$\begin{aligned} F_{P_t|\tau}(x|t) &= \Pr(P_t \leq x | \tau > t) = \sum_{s=t+1}^{\infty} \left\{ \sum_{z_{t_1}=0, \dots, z_{t_j}=z_{t_{j-1}}, z_{t+1}=z_t, \dots, z_{s-1}=z_{s-2}} \Pr(R_s[z_{t_1}, z_{t_2}, \dots, z_{t_{j-1}}, z_t] \right. \\ &+ Q_s^{(j)}(z_t : z_{t_j}) + Q_s^{(j+1)}(z_{t_j} : z_{t_{j+1}}] + \cdots + Q_s^{(i)}(z_{t_{i-1}\vee t} : z_{s-1}] \leq x) e^{-\mu(s-1)} \\ &\times \left. \frac{\mu(t_1)^{z_{t_1}}}{z_{t_1}!} \frac{\mu(t_1, t_2]^{z_{t_2}-z_{t_1}}}{(z_{t_2}-z_{t_1})!} \cdots \frac{\mu(t_{j-1}, t]^{z_t-z_{t_{j-1}}}}{(z_t-z_{t_{j-1}})!} \prod_{m=t+1}^{s-1} \frac{\mu(m-1, m]^{z_m-z_{m-1}}}{(z_m-z_{m-1})!} \right\} \Pr(\tau = s | \tau > t) \end{aligned}$$

Харин нөхцөлт бус тархалтын хувьд дараах томъёо биелнэ:

$$\begin{aligned} F_{P_t}(x) &= \Pr(P_t \leq x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{z_{t_1}=0, \dots, z_{t_j}=z_{t_{j-1}}, z_{t+1}=z_t, \dots, z_s=z_{s-1}} \Pr(R_{\infty}[z_{t_1}, z_{t_2}, \dots, z_{t_{j-1}}, z_t] \right. \\ &+ Q_{\infty}^{(j)}(z_t : z_{t_j}) + Q_{\infty}^{(j+1)}(z_{t_j} : z_{t_{j+1}}] + \cdots + Q_{\infty}^{(n+1)}(z_{t_n} : z_s] \leq x) e^{-\mu(s)} \\ &\times \left. \frac{\mu(t_1)^{z_{t_1}}}{z_{t_1}!} \frac{\mu(t_1, t_2]^{z_{t_2}-z_{t_1}}}{(z_{t_2}-z_{t_1})!} \cdots \frac{\mu(t_{j-1}, t]^{z_t-z_{t_{j-1}}}}{(z_t-z_{t_{j-1}})!} \prod_{m=t+1}^s \frac{\mu(m-1, m]^{z_m-z_{m-1}}}{(z_m-z_{m-1})!} \right\}. \end{aligned}$$

Хувьцааны санамсаргүй үнийн тархалтуудын дээрх томъёоноос эдгээр томъёонуудыг практикт шууд ашиглахад ихээхэн хүндрэлтэй болох нь илэрхий байна. Хэрэв санамсаргүй хэмжигдэхүүний бүх моментууд төгсгөлөг ба эдгээр моментууд дээр үндэслэсэн зэрэгт цуваа тэгийг агуулсан задгай завсар дээр тодорхойлогддог бол моментууд нь тухайн санамсаргүй хэмжигдэхүүний тархалтыг нэгэн утгатайгаар тодорхойлдог. Иймд тодорхой эрэмбийн момент төгсгөлөг бол бид момент дээр үндэслэсэн хувьцааны санамсаргүй үнэ P_t -ийн тархалтын функцийг ойролцоогоор илэрхийлж чадна. Иймд бид хувьцааны ирээдүйн санамсаргүй үнийн моментийг тооцоолох шаардлагатай юм.

Моментууд

$\phi_{Y^{(j)}}(u) := \mathbb{E}(e^{iuY_1^{(j)}})$, $j = 1, \dots, n+1$ байг, энд i нь хуурмаг нэгж. Тэгвэл $t \leq s$ хувьд, $Q^{(j)}(t, s]$ санамсаргүй хэмжигдэхүүний характеристик функцийн хувьд дараах томъёо (Mikosch [2009]) биелнэ

$$\phi_{Q^{(j)}(t, s]}(u) = \mathbb{E}(e^{iuQ^{(j)}(t, s]}) = \exp\{\mu(t, s)(\phi_{Y_1^{(j)}}(u) - 1)\}.$$

$Y_1^{(1)}, Y_2^{(1)}, \dots, Y_1^{(n+1)}, Y_2^{(n+1)}, \dots$ санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд нь өөр хоорондоо үл хамаарахаас гадна Пуассоны процесс $N(t)$ -ээс үл хамаарах тул $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots, Q^{(i)}$ санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд нь үл огтлолзох хугацааны интервалын хувьд үл хамаарах байна. Иймд $\tau = s$ нөхцөл дэх t хугацааны хувьцааны санамсаргүй үнэ P_t -ийн нөхцөлт характеристик функцийн доорх томъёоогоор өгөгдөнө.

$$\mathbb{E}(e^{iuP_t} | \tau = s) = \exp\{h_t(u|s)\}$$

энд

$$\begin{aligned} h_t(u|s) &:= iuF(s, t+1)d_0 + \mu(t_1)(\phi_{Y_1^{(1)}}(uF(s, t+1)) - 1) + \dots \\ &+ \mu(t_{j-2}, t_{j-1})(\phi_{Y_1^{(j-1)}}(uF(s, t+1)) - 1) + \mu(t_{j-1}, t](\phi_{Y_1^{(j)}}(uF(s, t+1)) - 1) \\ &+ \sum_{m=t+1}^{t_j} \mu(m-1, m](\phi_{Y_1^{(j)}}(uF(s, m)) - 1) + \sum_{m=t_j+1}^{t_{j+1}} \mu(m-1, m](\phi_{Y_1^{(j+1)}}(uF(s, m)) - 1) \\ &+ \dots + \sum_{m=t_{i-1}\vee t+1}^{s-1} \mu(m-1, m](\phi_{Y_1^{(i)}}(uF(s, m)) - 1). \end{aligned}$$

$h_t(u|s)$ нь бүх $s > t$ хувьд хүрэлцээтэй удаа дифференциалчлагддаг функцийн ба бэхлэгдсэн p -ийн хувьд $Y_1^{(j)p}, j = 1, \dots, n+1$ санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд интегралчлагддаг байг. Тэгвэл хэрэв бид характеристик функцийн $\phi_{Y_1^{(j)}}^{(p)}(0) = i^p \mathbb{E}(Y_1^{(j)p})$ томъёог ашиглавал $h_t(u|s)$ функцийн $u = 0$ цэг дээрх p дүгээр эрэмбийн дифференциал дараах хэлбэртэйгээр олдоно.

$$\begin{aligned} h_t^{(p)}(0|s) &= i^p \left\{ d_0 I_{\{1\}}(p) F(s, t+1] + \mathbb{E}(Y_1^{(1)p}) \mu(t_1) F(s, t+1]^p + \dots \right. \\ &+ \mathbb{E}(Y_1^{(j-1)p}) \mu(t_{j-2}, t_{j-1}] F(s, t+1]^p + \mathbb{E}(Y_1^{(j)p}) \mu(t_{j-1}, t] F(s, t+1]^p \\ &+ \mathbb{E}(Y_1^{(j)p}) \sum_{m=t+1}^{t_j} \mu(m-1, m] F(s, m]^p + \mathbb{E}(Y_1^{(j+1)p}) \sum_{m=t_j+1}^{t_{j+1}} \mu(m-1, m] F(s, m]^p + \dots \\ &\left. + \mathbb{E}(Y_1^{(i)p}) \sum_{m=t_{i-1}\vee t+1}^{s-1} \mu(m-1, m] F(s, m]^p \right\}, \end{aligned}$$

энд $I_{\{1\}}(p)$ нь индикатор функцийн. Θөрөөр хэлбэл, хэрэв $p = 1$ бол $I = 1$ эсрэг тохиолдолд $I = 0$.

Хэрэв бид Faa di Bruno-ийн томъёог (Johnson [2002]-г харах) ашиглaval t хугацаан дахь хувьцааны үнийн p дүгээр эрэмбийн нөхцөлт момент ($\tau > t$ нөхцөлдөх) дараах томъёогоор өгөгдөнө.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(P_t^p | \tau > t) &= \frac{1}{i^p} \frac{d^p}{du^p} \left(\mathbb{E}(e^{iuP_t} | \tau > t) \right) \Big|_{u=0} = \frac{1}{i^p} \sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{d^p}{du^p} \left(\exp\{h_t(u|s)\} \right) \Big|_{u=0} P(\tau = s | \tau > t) \quad (5.1) \\ &= \frac{1}{i^p} \sum_{s=t+1}^{\infty} \left(\sum \frac{p!}{b_1!b_2!\dots b_p!} \left(\frac{h'_t(0|s)}{1!} \right)^{b_1} \left(\frac{h''_t(0|s)}{2!} \right)^{b_2} \dots \left(\frac{h_t^{(p)}(0|s)}{p!} \right)^{b_p} \right) P(\tau = s | \tau > t),\end{aligned}$$

энд дээрх нийлбэр $b_1 + 2b_2 + \dots + pb_p = p$ тэгшитгэлийн сөрөг бус бүхэл b_1, \dots, b_p шийдүүдээр авагдана. Одоо бид дефолт хэзээ ч болохгүй буюу компани ноогдол ашгаа хугацаагүй тараана ($P(\tau = \infty) = 1$) гэж үзье. Энэ тохиолдолд хувьцааны t хугацаан дахь үнийн p дүгээр эрэмбийн момент доорх тэгшитгэлээр өгөгдөнө.

$$\mathbb{E}(P_t^p) = \frac{1}{i^p} \sum \frac{p!}{b_1!b_2!\dots b_p!} \left(\frac{h'_t(0|\infty)}{1!} \right)^{b_1} \left(\frac{h''_t(0|\infty)}{2!} \right)^{b_2} \dots \left(\frac{h_t^{(p)}(0|\infty)}{p!} \right)^{b_p}, \quad (5.2)$$

энд дээрх нийлбэр мөн $b_1 + 2b_2 + \dots + pb_p = p$ тэгшитгэлийн сөрөг бус бүхэл b_1, \dots, b_p шийдүүдээр авагдах ба

$$\begin{aligned}h_t^{(p)}(0|\infty) &= i^p \left\{ d_0 I_{\{1\}}(p) F(t+1) + \mathbb{E}(Y_1^{(1)p}) \mu(t_1) F(t+1)^p + \dots + \mathbb{E}(Y_1^{(j-1)p}) \mu(t_{j-2}, t_{j-1}] F(t+1)^p \right. \\ &\quad + \mathbb{E}(Y_1^{(j)p}) \mu(t_{j-1}, t] F(t+1)^p + \mathbb{E}(Y_1^{(j)p}) \sum_{m=t+1}^{t_j} \mu(m-1, m] F(m)^p + \dots \\ &\quad \left. + \mathbb{E}(Y_1^{(n)p}) \sum_{m=t_{n-1}+1}^{t_n} \mu(m-1, m] F(m)^p + \mathbb{E}(Y_1^{(n+1)p}) \sum_{m=t_n+1}^{\infty} \mu(m-1, m] F(m)^p \right\}.\end{aligned}$$

Ирээдүйн цаг хугацаа 1 үеэс ($n = 0$) бүрдэх ба Пуассоны процесийн дундажийн функц $\mu(t) = \lambda t$, $t \geq 0$ гэж үзье. Энэ тохиолдолд нийлмэл нэгэн төрлийн бус Пуассоны процесс ердийн нийлмэл Пуассоны процесс болох ба (5.5)-аас 1 эрэмбийн момент болон 2-4 эрэмбийн төвийн моментууд дараах томъёогоор өгөгдөнө.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(P_t) &= \frac{1}{k} \left\{ d_0 + \lambda \mathbb{E}(Y_1) \left(t + \frac{1+k}{k} \right) \right\} \\ \text{Var}(P_t) &= \frac{\lambda \mathbb{E}(Y_1^2)}{k^2} \left(t + \frac{(1+k)^2}{(1+k)^2 - 1} \right) \\ \mathbb{E}(P_t - \mathbb{E}(P_t))^3 &= \frac{\lambda \mathbb{E}(Y_1^3)}{k^3} \left(t + \frac{(1+k)^3}{(1+k)^3 - 1} \right) \\ \mathbb{E}(P_t - \mathbb{E}(P_t))^4 &= 3 \left(\frac{\lambda \mathbb{E}(Y_1^2)}{k^2} \left(t + \frac{(1+k)^2}{(1+k)^2 - 1} \right) \right)^2 + \frac{\lambda \mathbb{E}(Y_1^4)}{k^4} \left(t + \frac{(1+k)^4}{(1+k)^4 - 1} \right).\end{aligned}$$

Дээрх 1 эрэмбийн моментийн томъёоноос Пуассоны процесийн эрчим 1-тэй тэнцүү ($\lambda = 1$) үед өмнөх судалгааны ажлуудад гаргасан хувьцааны санамсаргүй үнийг тогтоох аддитив загварууд нь бидний загварын тухайн тохиолдол болох нь шууд харагдана (Hurley нар [?, ?], Yao [?], Hurley [?]).

5.1.4 Параметрүүдийн хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт

Бид боловсруулсан загварынхаа хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлтийг (ХИҮХБҮ) олохын тулд бидэнд $T + 1$ тооны хувьцааны үнэ, ноогдол ашгийн ажиглалтын утгууд болон ноогдол ашгийн үсрэлтийн мэдээл байгаа гэж үзье. Өөрөөр хэлбэл, бидэнд байгаа

өгөгдөл бол $\{d_0, P_0, N(0), \dots, d_T, P_T, N(T)\}$, энд $t = 0, \dots, T$ хувьд, d_t нь t хугацаандах ноогдол ашиг, P_t нь t хугацаандах хувьцааны үнэ ба $N(t)$ нь t хугацаа хүртлэх ноогдол ашигд гарсан нийт үсрэлтийн тоог илэрхийлсэн t хугацаандах ноогдол ашигийн үсрэлтийн мэдээлэл. Параметрийн үнэлэлтийг олохын тулд бид t хугацаандах хувьцааны үнэ өөрийн онолын үнээс санамсаргүй u_t хэмжээгээр зөрнө, бүх үеүүдэд үсрэлтийн санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд нэгэн ижил тархалттай, Θ/X $Y_i^{(j)} \stackrel{d}{=} Y_1$ гэж таамаглья. Энэ тохиолдолд манай загвар дараах системээр өгөгдөнө:

$$\begin{cases} P_t = (1+k)P_{t-1} - d_t + u_t \\ d_t = d_{t-1} + Q(t-1, t] \\ Q(t-1, t] = \sum_{i=N(t-1)+1}^{N(t)} Y_i \end{cases}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Бид u_t , Y_t санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүдийг

$$\begin{bmatrix} u_t \\ Y_1 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \mu_Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_u^2 & 0 \\ 0 & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}\right),$$

хамтын нормал тархалттай гэж үзье. Мөн

$$p_{-1} = (P_0, \dots, P_{T-1})^T, \quad p = (P_1, \dots, P_T)^T, \quad \text{and} \quad d = (d_1, \dots, d_T)^T,$$

гэсэн тэмдгэлгээнүүд оруулбал нэгэн төрлийн нийлмэл Пуассоны процесийн хувьд загварын параметрүүдийн ХИҮХБҮ-үүд дараах байдлаар олдоно:

$$\hat{k} = \frac{p_{-1}^T(p+d)}{p_{-1}^Tp_{-1}} - 1, \quad \hat{\sigma}_u^2 = \frac{e^T e}{T}, \quad \hat{\lambda} = \frac{N(T)}{T}, \quad \hat{\mu}_Y = \frac{Q(T)}{N(T)} = \frac{d_T - d_0}{N(T)} \quad (5.3)$$

ба

$$\hat{\sigma}_Y^2 = \sum_{t \in \mathcal{I}} \frac{N(t-1, t]}{N(T)} \left(\frac{Q(t-1, t]}{N(t-1, t]} - \frac{Q(T)}{N(T)} \right)^2 \quad (5.4)$$

энд $e = p + d - (1 + \hat{k})p_{-1}$. Параметрийн үнэлэлтүүдийн талаар диссертациас харж болно. Хэрэв $k > 0$, бол үнийн процесс P_t -ийн хугацаан цуваа дэлбэрэн (explosive). Иймд шаардаж буй өгөөжийн параметрийн үнэлэлтийн хувьд ердийн t тестийг ашиглаж чадахгүй. Гэвч хэрэв $H_0 : k = k_*$ таамаглал үнэн бол k параметрийн YXB харьцааны тестийн хувьд дараах үр дүн биелэхийг харуулж болно:

$$\text{LR}(k_*) = T \ln \left(1 + \frac{e_*^T e_* - e^T e}{e^T e} \right) = T \ln \left(1 + \frac{(\hat{k} - k_*)^2 p_{-1}^T p_{-1}}{e^T e} \right) \xrightarrow{d} \chi^2(1),$$

энд $e_* = p + d - (1 + k_*)p_{-1}$ ба $\chi^2(1)$ -аар нэг чөлөөний зэрэгтэй хи-квадрат тархалтыг, d -ээр тархалтаарх нийлэлтийг тус тус тэмдгэлсэн. Шаардаж буй өгөөж k -ийн $(1 - \alpha)$ итгэх түвшинд харгалзах итгэх завсар дараах томъёогоор өгөгддөг болохыг Coles [?]-ээс харж болно:

$$C_\alpha = \{k \in \mathbb{R} \mid \text{LR}(k) \leq c_\alpha\},$$

энд c_α нь $(1 - \alpha)$ итгэх түвшинд харгалзах $\chi^2(1)$ тархалтын квантилын утга. Бидний загварын хувьд уг итгэх завсар дараах томъёогоор өгөгдөнө:

$$\hat{k} - \frac{e^T e \sqrt{\exp\{c_\alpha/T\} - 1}}{p_{-1}^T p_{-1}} \leq k \leq \hat{k} + \frac{e^T e \sqrt{\exp\{c_\alpha/T\} - 1}}{p_{-1}^T p_{-1}}. \quad (5.5)$$

Загварын бусад параметрүүдийн хувь дахь түүврийн тархалт болон итгэх завсрын томъёонуудыг диссертациын ажлаас харж болно.

5.2 Тоон туршилт

Бид эхлээд өөрсдийн боловсруулсан ХИҮХБ аргаар загварын параметрүүдээ үнэлнэ. Загварын нийцлийг шалгахын тулд S&P 500 индексэд бүртгэлтэй 5 компанийг сонгон харгалзах өгөгдлүүдийг Thomson Reuters Eikon-оос татаж авсан. Сонгосон компаниудын орцын параметрүүдийн Хүснэгт 5.1-д үзүүлсэн. Хүснэгт 5.1-ын 2-дугаар мөр нь компаниудын нэгж хувьцаандаа тараасан ноогдол ашиг (ам.доллараар) харгалзана. Хүснэгтийн 3-дугаар мөр нь компаниудын ирээдүйн ноогдол ашигуудын хямдруулалтад ашиглагдах шаардаж буй өгөөжийг илэрхийлнэ. Энд бид Bank of America-ийн шаардаж буй өгөөжийн цэгэн үнэлэлтийг өөрчилсөн. Санхүүгийн хямралуудаас шалтгаалж Bank of America-ийн шаардаж буй өгөөж 2.65% гарсан ба бид уг үр дунг үнэн шаардаж буй өгөөжийг төлөөлж чадахгүй гэж үзсэн. Хэрэв бид хямралын дараах өгөгдлийг (2009-2019) ашиглалт, параметрийн үнэлэлт 11.25%, 99%-ийн итгэх завсар нь (7.72%, 14.79%) гарсан. Хэрэв 2008 оны хямралаас өмнөх өгөгдлийг (1979-2007) ашиглалт параметрийн үнэлэлт 7.50%, 99%-ийн итгэх завсар нь (5.36%, 9.64%) гарсан. Иймд бид Bank of America-ийн загвард ашиглагдах шаардаж буй өгөөжийг 8.00%-аар сонгосон. Энэхүү 8.00% 2008 оны хямралаас өмнөх болон хойшхи 99%-ийн итгэх завсард агуулагдаж байгааг анхаарах хэрэгтэй.

Хүснэгт 5.1: Загварын параметрүүд

Row	Parameters	Johnson & Johnson	Bank of America	PepsiCo	Boeing	Avery Dennison
2.	$d_{0,i}$	3.750	0.660	3.792	8.220	3.210
3.	k_i	9.65%	8.00%	9.66%	13.82%	8.36%
4.	$\mu_i^{(1)}/\mu_{Y,i}$	1.250	1.462	1.555	2.436	1.442
5.	$\mu_i^{(2)}/\mu_{Y,i}$	2.219	2.397	2.827	5.394	2.379
6.	$\mu_i^{(3)}/\mu_{Y,i}$	11.753	8.260	6.927	19.162	8.540
7.	$\sigma_i^{(2)}/\sigma_i^{(1)}$	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
8.	$\sigma_i^{(3)}/\sigma_i^{(1)}$	3.0	3.0	3.0	3.0	3.0
9.	Credit Rating	AAA	A	A	A	BBB

Бид сонгосон компаниудын ирээдүй 3 үеэс тогтох ба үе болгонд харгалзах ноогдол ашигийн үсрэлтийн санамсаргүй хэмжигдэхүүнийг нормал тархалттай гэж таамагласан. 1-дүгээр үе 0-3 жилүүдийг ($t_0 = 0 \leq t < t_1 = 4$), 2-дугаар үе 4-10 жилүүдийг ($t_1 = 4 \leq t < t_2 = 10$), 3-дугаар үе 11 болон түүнээс хойшхи жилүүдийг ($t_2 = 11 \leq t$) хамрана гэж үзсэн. Бид компаниудын t -дүгээр үеийн үсрэлтийн санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүдийн дундаж болон стандарт хазайлтыг харгалзан $\mu_i^{(t)}, \sigma_i^{(t)}, t = 1, 2, 3, i = 1, \dots, 5$ -аар тэмдгэлье.

1-дүгээр үе (0-3 жилүүд): Бид 1-дүгээр үеийн үсрэлтийн санамсаргүй хэмжигдэхүүний стандарт хазайлт 2010-2019 оны ноогдол ашигийн өгөгдлийг ашиглаж үнэлсэн үнэлэлттэй тэнцүү гэж үзсэн. Сонгосон компаниудын 1-дүгээр үед харгалзах жигнэсэн үржүүлэгчидийг Хүснэгт 5.1-ын 4-дүгээр багананд үзүүлэв. Иймд Johnson & Johnson-ны 1-дүгээр үед харгалзах ноогдол ашигийн үсрэлтийн санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд $Y_1^{(1)} \sim \mathcal{N}(1.250 \times 0.182, 0.025^2) = \mathcal{N}(0.228, 0.025^2)$ гэж загварчлагдана. Цаг хугацаа уrtsax тусах хувьцааны ноогдол ашигийн хэмжээний тодорхойгүй байдал ихсэнэ. Иймд бид 2 болон 3 дугаар үеүүдийн стандарт хазайлтыг 1 дүгээр үеийн стандарт хазайлттай харьцуулахад харгалзан 2 болон 3 дахин ихэсгэсэн (Хүснэгт 5.1-ын 7-8 дугаар мөр).

2-дугаар үе (4-10 жилүүд): 2-дугаар үед харгалзах компаниудын жигнэсэн үржүүлэгчидийг Хүснэгт 5.1-ын 5-дугаар мөрөнд харуулсан. Иймд Bank of America-ийн 2-дугаар үед харгалзах ноогдол ашигийн үсрэлтийн санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд $Y_2^{(2)} \sim \mathcal{N}(2.397 \times 0.103, (2 \times 0.029)^2) = \mathcal{N}(0.248, 0.059^2)$ тархалттай.

3-дугаар үе (3 болон түүнээс хойшхи жилүүд): Бид үлдэгдэл хямдруулалтын хүчин зүйлийн нөлөөг өөртөө тусгасан дундаж үржүүлэгчидийн тоог $m = 3$ -аар сонгон авсан.

Хүснэгт 3-ын 6-дугаар багананд сонгосон компаниудын 3-дугаар үед харгалзах жигнэсэн үржүүлэгчдийг харуулсан. Тухайлбал, PepsiCo-ийн 3-дугаар үед харгалзах ноогдол ашгийн үсрэлтийн санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд $Y_3^{(3)} \sim \mathcal{N}(6.927 \times 0.211, (3 \times 0.093)^2) = \mathcal{N}(1.464, 0.279^2)$ гэж загварчлагдана.

Хүснэгт 5.2: Дефолт хэзээ ч болохгүй тохиолдол

Row	Parameters	Johnson & Johnson	Bank of America	PepsiCo	Boeing	Avery Dennison
2.	$\mathbb{E}(P_{0,i})$	154.306	62.452	136.627	384.859	144.450
3.	$P_{0,i}^{12/31/19}$	145.870	35.220	136.670	325.760	130.820
4.	$\bar{P}_{0,i}^{MC}$	153.886	62.477	136.442	385.302	144.003
5.	LB_i^{MC}	114.656	42.692	103.666	264.279	103.552
6.	UB_i^{MC}	196.468	85.237	171.903	522.207	190.125
7.	σ_i	29.668	10.425	19.758	193.773	24.266
8.	$b_{3,i}$	0.088	0.326	0.163	0.009	0.195
9.	$\kappa_{4,i}$	0.018	0.108	0.038	0.001	0.056

Параметрүүдийг сонгосоны дараа сонгосон компаниудын 0 хугацааны онолын үнийг тооцоольё. Хүснэгт 5.2-д бид бүх компаниуд ирээдүйд дефолт болохгүй гэж таамагласан. Хүснэгтийн хоёрдугаар мөрөнд сонгосон компаниудын онолын үнийг өөрсдийн загварыг ашиглан тооцоолсон үр дүнг, гуравдугаар мөрөнд компаниудын 12/31/2019 өдрийн хаалтын бодит ханшийг харуулсан. 4-6 мөрөнд Monte-Carlo симуляцийн үр дүнг үзүүлэв. Энд бид 5000 удаа симуляци хийсэн. 4 дүгээр мөрөнд симуляцийн үр дүнгийн дунджийг харуулсан бол 5, 6 дугаар мөрүүд нь компаниудын санамсаргүй үнийн 95%-ийн Monte-Carlo симуляцийн доод, дээд итгэх хилүүдэд харгалзана. Доод, дээд хилээс Bank of America-ийн бодит ханш итгэх завсарт оршихгүй болох нь харагдаж байна. Хүснэгт 5.2-ын 7-9 мөрөнд компаниудын тэг хугацаан дахь ханшийн стандарт хазайлт, skewness, kurtosis-ийг тооцож харуулав. Skewness болон kurtosis-ийн үр дүнгээс харахад сонгосон компаниудын хувьцааны ханшийн тархалт Хүснэгт 5.3-ийн харгалзах үр дунтэй харьцуулахад илүү нормал тархалттай ойролцоо байна.

Хүснэгт 5.3: Дефолтыг нэгэн төрлийн Марковын хэлхээгээр загварчилсан тохиолдол

Row	Parameters	Johnson & Johnson	Bank of America	PepsiCo	Boeing	Avery Dennison
2.	$\mathbb{E}(P_{0,i})$	145.717	53.338	123.353	356.269	113.170
3.	$P_{0,i}^{12/31/19}$	145.870	35.220	136.670	325.760	130.820
4.	$\bar{P}_{0,i}^{MC}$	146.061	53.427	124.165	357.645	113.630
5.	LB_i^{MC}	71.383	9.252	43.403	109.269	12.898
6.	UB_i^{MC}	194.580	82.247	171.023	512.757	183.824
7.	σ_i	35.357	17.397	31.199	194.638	46.425
8.	$b_{3,i}$	-0.461	-0.769	-0.997	0.137	-0.583
9.	$\kappa_{4,i}$	0.865	0.559	1.528	-0.168	-0.392

Хүснэгт 5.3-д дефолт болох магадлалыг нэгэн төрлийн Марковын хэлхээгээр загварчилсан үеийн үр дүнгүүдийг үзүүлэв. Дефолт болох магадлалыг тооцоолоходо бид Standard&Poors [?]-ийн нэг жилийн шилжилтийн хувийг ашигласан. Хүснэгт 5.3-ийн 2 мөрөөс компаниудын тэг хугацаандах онолын үнэ Хүснэгт 5.2-ийн онолын үнээс бага байгаа нь харагдаж байна. Компани дефолт болсон үед хөрөнгө оруулагчид цаашдын ноогдол ашгаа авч чадахгүйд хүрэх учраас Хүснэгт 5.3-ийн онолын үнэ Хүснэгт 5.2-ын онолын үнээс бага байна. Хүснэгт 5.3-ийн хувьд Monte-Carlo 95%-ийн итгэх завсар өргөсөн зүүн талруу шилжсэн бөгөөд одоо бүх бодит ханш итгэх завсрын дотор байршсан

байна. Компаниудын ханшийн стандарт хазайлт, kurtosis-ийн модул Хүснэгт 5.2-ынхаас их бөгөөд Boeing-оос бусад компаниудын хувьд зүүн талруу хэлбийсэн байна. Иймд энэ тохиолдолд Johnson & Johnson, Bank of America and PepsiCo компаниудын ханшийн тархалт Хүснэгт 5.2-ын үр дүнтэй харьцуулахад өргөн сүүлтэй байна.

5.3 Хавсралтууд

An Extension of One-Period Nash Equilibrium Model in Non-Life Insurance Markets

G. Battulga¹, L. Altangerel^{2*}, G. Battur¹

¹Department of Applied Mathematics, National University of Mongolia, Ulaanbaatar, Mongolia

²Faculty of Mathematics, Computer and Natural Sciences, German-Mongolian Institute for Resources and Technology, Nalaikh, Mongolia

Email: battulga.g@seas.num.edu.mn, *altangerel@gmit.edu.mn, battur@seas.num.edu.mn

How to cite this paper: Battulga, G., Altangerel, L. and Battur, G. (2018) An Extension of One-Period Nash Equilibrium Model in Non-Life Insurance Markets. *Applied Mathematics*, **9**, 1339-1350.
<https://doi.org/10.4236/am.2018.912087>

Received: November 11, 2018

Accepted: December 17, 2018

Published: December 20, 2018

Copyright © 2018 by authors and Scientific Research Publishing Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

This paper deals with an extension of the one-period model in non-life insurance markets (cf. [1]) by using a transition probability matrix depending on some economic factors. We introduce a multi-period model and in each period the solvency constraints will be updated. Moreover, the model has the inactive state including some uninsured population. Similar results on the existence of premium equilibrium and sensitivity analysis for this model are presented and illustrated by numerical results.

Keywords

Nash Equilibrium Model, Variational Inequalities, Transition Matrix, Non-Life Insurance Markets

1. Introduction

We consider I insurers competing in a market of n policyholders or insureds. Assume that the policyholders can decide either to renew the policy with the present insurer or switch to one of the competitors.

According to Dutang *et al.* in [1], there are two non-cooperative game theory models in insurance markets: the Bertrand oligopoly, where insurers set premiums and Cournot oligopoly, where insurers choose optimal values of insurance coverage. Some extensions of these models have been investigated by various authors (see [1] and references therein). The game theoretic approach has received a great deal of attention by many authors, who contributed in various ways (see [2] [3] [4] and references therein).

By considering a lapse and an aggregate loss models for policyholders, the Bertrand model of Rees *et al.* (cf. [5]) has been extended in [1]. They showed the

suitability of non-cooperative game theory for insurance market modelling. Moreover, they introduced the solvency constraints first time. As usual, “game” for insurers means to set premium for which policies are offered to the policyholders.

It would be interesting to investigate a model from the perspective of insureds’ behavior how they can react on current economic situation. If the economy is getting better, then insureds including individuals and companies are interested in having insurance contracts, contrariwise they might be uninsured. On the other hand, the success and achievements of insurers in the coverage period can attract customers to keep insurance contracts. Otherwise, they have a risk to lose customers. Therefore, attracting insureds could depend on economic factors such as macroeconomic variables and financial data of insurance companies.

This paper aims to extend the one-period model in non-life insurance markets (see [1]) by using a transition probability matrix depending on some economic factors. We consider a model with a multi-period and assume that the solvency constraints will be updated in each period. Moreover, our model has the inactive state which means some insureds are uninsured.

The rest of the paper is structured as follows. In Section 2, we give a short summary of the one-period model. Section 3 deals with an extension of the one-period model and some assertions related to the existence of premium equilibrium and sensitivity analysis are presented. In conclusion, in Section 4, some numerical results are given.

2. The One-Period Model

In this section, we provide a short overview of the one-period model investigated in [1]. Let $(x_1, \dots, x_I) \in \mathbb{R}^I$ be a price vector, where x_j represents the premium of insurer j . Once the premium is set by all insurers, the insureds choose to renew or to lapse from their current insurer. Then, insurers pay claims, according to their portfolio size, during the coverage year.

Let Y_i be the aggregate loss of policy i during the coverage period. We assume that $Y_i, i \in \{1, \dots, n\}$ are independent and identically distributed (i.i.d.)

random variables. The aggregate claim amount is $S_j(x) = \sum_{i=1}^{N_j(x)} Y_i$, where

$N_j(x)$ is the portfolio size of insurer j given the price vector x .

Let n_j be the initial portfolio size of insurer j , i.e., $\sum_{j=1}^I n_j = n$. We assume that insurer j maximizes the expected profit of renewing policies defined as

$$O_j(x) = \frac{n_j}{n} \left(1 - \beta_j \left(\frac{x_j}{m_j(x)} - 1 \right) \right) (x_j - \pi_j),$$

where π_j is the break-even premium j expressed as

$$\pi_j = w_j \bar{a}_{j,0} + (1 - w_j) \bar{m}_0$$

and $m_j(x)$ is a market premium proxy which is the mean price of the other

competitors

$$m_j(x) = \frac{1}{I-1} \sum_{k \neq j} x_k.$$

By $\bar{a}_{j,0}$ and \bar{m}_0 , we denote the actuarial premium based on the past loss experience of insurer j and the market premium, respectively. $w_j \in [0,1]$ is the credibility factor of insurer j and $\beta_j > 0$ is the elasticity parameter.

In addition to maximizing a certain objective function, insurers must satisfy a solvency constraint imposed by the regulator. A simplification is to approximate a q -quantile $Q(n,q)$ of aggregate claim amount of n i.i.d. risks by a bilinear function of n and \sqrt{n}

$$Q(n,q) = E(Y)n + k_q \sigma(Y)\sqrt{n},$$

where the solvency coefficient k_q has to be determined and Y is the generic individual claim severity variable. $E(\cdot)$ and $\sigma(\cdot)$ are a mean and standard deviation of a random variable. Using the approximation the solvency capital requirement SCR is deduced as

$$SCR_q \approx k_q \sigma(Y)\sqrt{n}.$$

Then the solvency constraint function can be defined as follows

$$g_j(x_j) = \frac{K_j + n_j(x_j - \pi_j)(1 - e_j)}{k_q \sigma(Y)\sqrt{n}} \geq 1,$$

where e_j is the expense rate as a percentage of gross written premium.

The one-period Nash equilibrium model in non-life insurance markets becomes

$$\max_{x_j \in X_j} O_j(x), j = 1, \dots, I,$$

where

$$\begin{aligned} X_j &:= \left\{ x_j \in [\underline{x}, \bar{x}] \mid g_j(x_j) \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ x_j \in [\underline{x}, \bar{x}] \mid K_j + n_j(x_j - \pi_j)(1 - e_j) \geq k_q \sigma(Y)\sqrt{n} \right\}, \end{aligned}$$

and \underline{x}, \bar{x} are the minimum and the maximum premium, respectively.

3. Extension of the One-Period Model

This section deals with an extension of the one-period model considered from the perspective economic factors. Let m be number of periods. To consider a possible extension of the model with m -period, we assume that policyholders will react on the current economic situation *i.e.*, if the economy is getting better, then they have interests to be insured. As before, we assume that the market has I insurers and n insureds. Let $z(k) \in \mathbb{R}^q$ be economic factor in k th period and $\gamma_{ij}(k) \in \mathbb{R}^q$ be a vector of economic weights in k th period with respect to the movement from insurer i to j . We introduce a transition matrix (see [6])

describing insureds' movement to insurers.

$$P(k) = \begin{pmatrix} p_{1,1}(k) & p_{1,2}(k) & \cdots & p_{1,I}(k) & p_{1,I+1}(k) \\ p_{2,1}(k) & p_{2,2}(k) & \cdots & p_{2,I}(k) & p_{2,I+1}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{I,1}(k) & p_{I,2}(k) & \cdots & p_{I,I}(k) & p_{I,I+1}(k) \\ p_{I+1,1}(k) & p_{I+1,2}(k) & \cdots & p_{I+1,I}(k) & p_{I+1,I+1}(k) \end{pmatrix},$$

where $p_{i,j}(k)$ denotes the probability for customers to switch from insurer i to j in k th period. $(I+1)$ th column corresponds to uninsured ones whose state can be called inactive. According to [7] (see, also [1]), the transition probability can be modelled as

$$p_{i,j}(k) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \sum_{l=1}^I \exp(\langle \gamma_{il}(k), z(k) \rangle)} & \text{if } j = I+1 \\ \frac{\exp(\langle \gamma_{ij}(k), z(k) \rangle)}{1 + \sum_{l=1}^I \exp(\langle \gamma_{il}(k), z(k) \rangle)} & \text{if } j \neq I+1, \end{cases}$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the Euclidean inner product. If the economy is deteriorate in k th period, some insureds don't want to keep insurance contracts, therefore $p_{i,j}(k), j=1, \dots, I$ will decrease and $p_{i,I+1}$ will increase. In k th period, the portfolio size $N_j(k)$ of insurer j for the next period is determined by the sum of renewed policies and businesses coming from other insurers. Hence

$$\begin{aligned} N_j(k) &= N_j(k-1)p_{j,j}(k) + \sum_{i=1, i \neq j}^{I+1} N_i(k-1)p_{i,j}(k) \\ &= \sum_{i=1}^{I+1} N_i(k-1)p_{i,j}(k), \end{aligned}$$

where $N_j(0) = n_j$. Let r_f be a risk free rate and $v = \frac{1}{1+r_f}$ be a discount factor. Based on [1], the insurer j maximizes the present value of expected profit of renewing policies defined as

$$O_m^j(x) = \sum_{k=1}^m \frac{v^k N_j(k)}{n} \left(1 - \beta_j(k) \left(\frac{x_j^k}{m_j(x^k)} - 1 \right) \right) (x_j^k - \pi_j(k)), \quad (1)$$

where $x = (x_1^T, \dots, x_I^T)^T$, $x_j = (x_j^1, \dots, x_j^m)^T$ for $j = 1, \dots, I$, and

$m_j(x^k) = \frac{1}{I-1} \sum_{i \neq j} x_i^k$. The solvency constraints for insurer j can be redefined as

$$g_\ell^j(x_j) = \frac{K_j + \sum_{k=1}^\ell v^k N_j(k)(x_j^k - \pi_j(k))(1 - e_j(k))}{k_q \sigma(Y) \sqrt{\sum_{k=1}^\ell v^k N_j(k)}} - 1, \quad \text{for } \ell = 1, 2, \dots, m.$$

Then, the strategy set of each player $j, j \in \{1, \dots, I\}$ is

$$\begin{aligned}
X_m^j &:= \left\{ x_j \in [\underline{x}, \bar{x}]^m \mid g_\ell^j(x_j) \geq 0, \ell = 1, \dots, m \right\} \\
&= \left\{ x_j \in [\underline{x}, \bar{x}]^m \mid K_j + \sum_{k=1}^{\ell} v^k N_j(k)(x_j^k - \pi_j(k))(1 - e_j(k)) \right. \\
&\quad \left. \geq k_q \sigma(Y) \sqrt{\sum_{k=1}^{\ell} v^k N_j(k)}, \ell = 1, m \right\}
\end{aligned} \tag{2}$$

Now we give some similar results for m -period model.

Proposition 1. *The m -period insurance game with I players whose objective functions and solvency constraints are defined by (1) and (2), respectively, admits a unique Nash premium equilibrium.*

Proof: In a similar way as in [1] and by Theorem 1 in [8], we can verify the existence of a Nash equilibrium. On the other hand, since for any $(x_j^1, \dots, x_j^{\ell-1}, x_j^{\ell+1}, \dots, x_j^m; x_{-j})$, the function $O_m^j(x)$ is strictly concave and differentiable with respect to x_j^ℓ , for $\forall x, y \in \mathbb{R}^{Im}$ it hold

$$\langle \nabla_{x_j} O_m^j(x), y_j - x_j \rangle > O_m^j(y) - O_m^j(x),$$

and

$$\langle \nabla_{x_j} O_m^j(y), x_j - y_j \rangle > O_m^j(x) - O_m^j(y).$$

Adding both inequalities, we have

$$\begin{aligned}
&\langle \nabla_{x_j} O_m^j(x), y_j - x_j \rangle + \langle \nabla_{x_j} O_m^j(y), x_j - y_j \rangle \\
&> O_m^j(y) - O_m^j(x) + O_m^j(x) - O_m^j(y) = 0.
\end{aligned}$$

Denoting by $r = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^I$ and taking the sum by $j, j = 1, \dots, I$, we obtain that

$$\sum_{j=1}^I r_j \langle \nabla_{x_j} O_m^j(x), y_j - x_j \rangle + \sum_{j=1}^I r_j \langle \nabla_{x_j} O_m^j(y), x_j - y_j \rangle > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^{ml}$$

which guarantees the uniqueness of the equilibrium (cf. Theorem 2 in [8]). \square

Proposition 2. *Let x^* be the premium equilibrium of the m -period insurance game with I players.*

1) If all solvency constraints are either active or inactive, then for each player j and period k , the corresponding equilibrium $x_j^{k*} \in [\underline{x}, \bar{x}]$ depends on the parameters in the following way:

- a) It increases with break-even premiums $\pi_j(k)$, solvency coefficient k_q , loss volatility $\sigma(Y)$, expense rate $e_j(k)$, and risk free rate r_f for $k \geq 2$ and
- b) Decreases with sensitivity parameter $\beta_j(k)$, capital K_j for $k = 1$, and, portfolio size $N_j(\ell), \ell = 1, \dots, k$ for $k \geq 2$.

2) If all constraint functions are inactive, then the premium equilibrium is a solution of the linear system of equations

$$M_\beta x^* = v,$$

where

$$M_\beta = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix},$$

$$v = (\beta_1(1)\pi_1(1), \dots, \beta_I(1)\pi_I(1), \dots, \beta_1(m)\pi_1(m), \dots, \beta_I(m)\pi_I(m))^T,$$

and

$$A_k = \begin{pmatrix} 2\beta_1(k) & -\frac{1+\beta_1(k)}{I-1} & \cdots & -\frac{1+\beta_1(k)}{I-1} \\ -\frac{1+\beta_2(k)}{I-1} & 2\beta_2(k) & \cdots & -\frac{1+\beta_2(k)}{I-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1+\beta_I(k)}{I-1} & -\frac{1+\beta_I(k)}{I-1} & \cdots & 2\beta_I(k) \end{pmatrix}, k = 1, \dots, m.$$

Proof: The KKT conditions for the premium equilibrium x_j^* of insurer j has the following form:

$$\begin{cases} \nabla_{x_j} O_j(x^*) + \sum_{\ell=1}^m \lambda_{1\ell}^{j*} \nabla_{x_j} g_\ell(x_j^*) + \lambda_2^{j*} - \lambda_3^{j*} = 0, \\ \lambda^{j*} = (\lambda_1^{j*}, \lambda_2^{j*}, \lambda_3^{j*})^T \geq 0, \lambda_1^{j*} \in \mathbb{R}^m, \lambda_2^{j*} \in \mathbb{R}^m, \lambda_3^{j*} \in \mathbb{R}^m, \\ g_k(x_j^*) \geq 0, x_j^{k*} - \underline{x} \geq 0, \bar{x} - x_j^k \geq 0, k = 1, \dots, m, \\ \lambda_{1k}^{j*} g_k(x_j^*) = 0, \lambda_{2k}^{j*} (x_j^{k*} - \underline{x}) = 0, \lambda_{3k}^{j*} (\bar{x} - x_j^k) = 0, k = 1, \dots, m. \end{cases}$$

k -th component from the first equation of the system becomes

$$\frac{\partial}{\partial x_j^k} O_m^j(x^*) + \sum_{\ell=1}^m \lambda_{1\ell}^{j*} \frac{\partial}{\partial x_j^k} g_\ell(x_j^*) + \lambda_{2k}^{j*} - \lambda_{3k}^{j*} = 0. \quad (3)$$

1) Let $x_j^{k*} \in [\underline{x}, \bar{x}]$. Then $\lambda_{2k}^{j*} = \lambda_{3k}^{j*} = 0$. We consider two cases.

a) Let us assume that the solvency constraints are all inactive, i.e.,

$g_\ell(x_j^*) > 0, \ell = 1, \dots, m$. Then, insurer j 's premium equilibrium verifies

$$\frac{\partial}{\partial x_j^k} O_m^j(x^*) = 0, \text{ i.e.,}$$

$$\frac{v^k N_j(k)}{n} \left(1 - 2\beta_j(k) \frac{x_j^{k*}}{m_j(x^{k*})} + \beta_j(k) + \beta_j(k) \frac{\pi_j(k)}{m_j(x^{k*})} \right) = 0. \quad (4)$$

Let $x_j^k(y) := (x_j^1, \dots, x_j^{k-1}, y, x_j^{k+1}, \dots, x_j^m; x_{-j})^T$. In order to investigate the sensitivity depending on parameter z , let us define the function $F_x^{k,j}$ as

$$F_x^{k,j}(z, y) := \frac{\partial}{\partial x_j^k} O_m^j(x_j^k(y), z),$$

and consider the equation of the form $F_x^{k,j}(z, y) = 0$. Under assumptions that partial derivatives of $F_x^{k,j}$ exist and are continuous at (z_0, y_0) , and also

$\frac{\partial F_x^{k,j}}{\partial y}(z_0, y_0) \neq 0$, by the implicit function theorem, there exists a function φ

defined in a neighbourhood of (z_0, y_0) such that $F_x^{k,j}(z, \phi(z)) = 0$ and $\phi(z_0) = y_0$. The derivative of ϕ is given by

$$\phi'(z) = -\left. \frac{\frac{\partial F_x^{k,j}}{\partial z}}{\frac{\partial F_x^{k,j}}{\partial y}} \right|_{y=\phi(z)}.$$

In our case, we have

$$\frac{\partial F_x^{k,j}}{\partial y}(z, y) = \frac{\partial^2 O_m^j}{\partial x_j^{k2}} = -2\beta_j(k) \frac{v^k N_j(k)}{n \cdot m_j(x^k)} < 0.$$

As a consequence, it holds

$$\text{sign}(\phi'(z)) = \text{sign}\left(\frac{\partial F_x^{k,j}}{\partial z}(z, \phi(z))\right).$$

i) Let $z := \pi_j(k)$. Then

$$\frac{\partial F_x^{k,j}}{\partial z}(z, y) = \frac{v^k N_j(k) \beta_j(k)}{n \cdot m_j(x^k)} > 0.$$

In other words, the function $\pi_j(k) \rightarrow x_j^{k*}(\pi_j(k))$ is increasing.

ii) Let z be the sensitivity coefficient $\beta_j(k)$. Then, we have

$$\frac{\partial F_x^{k,j}}{\partial z}(z, y) = \frac{v^k N_j(k)}{n} \left(-2 \frac{y}{m_j(x^k)} + 1 + \frac{\pi_j(k)}{m_j(x^k)} \right).$$

By using (4), we obtain that

$$\frac{\partial F_x^{k,j}}{\partial z}(z, \phi(z)) = \frac{v^k N_j(k)}{n} \cdot \frac{-1}{z} < 0.$$

Therefore, the function $\beta_j(k) \rightarrow x_j^{k*}(\beta_j(k))$ is decreasing.

b) If the solvency constraints are all active, then the premium equilibrium satisfies $g_\ell^j(x_j^*) = 0$, for $\ell = 1, \dots, m$ and consequently, one get

$$x_j^{1*} = \pi_j(1) + \frac{k_q \sigma(Y) \sqrt{v N_j(1)} - K_j}{v N_j(1)(1 - e_j(1))},$$

$$x_j^{\ell*} = \pi_j(\ell) + \frac{k_q \sigma(Y)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\ell} v^k N_j(k)} + \sqrt{\sum_{k=1}^{\ell-1} v^k N_j(k)}(1 - e_j(\ell))}, \quad \ell = 2, \dots, m. \quad (5)$$

From (5), we can verify directly that x_j^{k*} is an increasing function of $\pi_j(k)$, k_q , $e_j(k)$ and r_f for $k \geq 2$. Moreover, it is a decreasing function of K_j for $k=1$ and $N_j(\ell), \ell = 1, \dots, k$ for $k \geq 2$.

2) If all constraints are inactive at a Nash equilibrium x^* , then taking into account $m_j(x^k) = \frac{1}{I-1} \sum_{i \neq j} x_i^k$ and from (4) follows that

$$2\beta_j(k) x_j^{k*} - (1 + \beta_j(k)) \frac{1}{I-1} \sum_{i \neq j} x_i^{k*} = \beta_j(k) \pi_j(k), \forall j, k.$$

This system can be rewritten in matrix form as $M_\beta x = v$. As in [1] mentioned, we can see that the matrix M_β is strictly diagonally dominant if the conditions $\beta_j(k) > 1, j = \overline{1, I}, k = \overline{1, m}$ are fulfilled. Under this condition M_β is invertible and therefore $x^* = M_\beta^{-1}v$.

□

Remark 1. If $x_j^{k^*} = \underline{x}$ or \bar{x} , then the premium equilibrium is independent of those parameters.

Remark 2. For a game with one leader and $I - 1$ followers with payoff functions O_m^j and the strategy set X_m^j , a Stackelberg equilibrium is the problem that consists in finding a vector $\bar{x} = (\bar{x}_1^\top, \dots, \bar{x}_I^\top)$, $\bar{x}_j = (\bar{x}_j^1, \dots, \bar{x}_j^m)$ such that \bar{x}_1 solves the problem

$$\sup_{y \in X_m^1} O_1(y; x_2, \dots, x_I),$$

where (x_2, \dots, x_I) is a Nash equilibrium for the game with the $I - 1$ followers and given strategy x_1 for insurer 1 which is assumed to be a leader. In this case, it is not difficult to show the existence of Stackelberg equilibrium (cf. [1]).

4. Numerical Experiments

In this section we show some numerical results dealing with sensitivity analysis presented in Proposition 2 in Section 3. Let us notice that the Nash equilibrium model can be reduced to the variational inequality problem which consists in finding $x \in \Omega := X_m^1 \times X_m^2 \times \dots \times X_m^I$ such that

$$(VI) \quad \langle F(x), y - x \rangle \geq 0, \forall y \in \Omega,$$

where $F(x) = \left(\nabla_{x_j} O_m^j(x) \right)_{j=1}^I$. In order solve the problem (VI), we apply the hyperplane projection algorithm (see [9] and [10]). We consider three player's game and let $m = 3$.

1) Base case:

Table 1 shows that if we use the data from [1] in each period, then we get the same results.

2) Scenario 1:

Table 2 shows results for the case if elasticity parameter of first player increases up to 3.5 in three periods.

3) Scenario 2:

Table 3 presents results for the case if elasticity parameters of all players increase in Period 2. Then, premium equilibriums are changed only in Period 2.

4) Scenario 3:

In this case, we assume that break-even premium for player 1 in Period 1 and for player 3 in Period 3 are increasing and break-even premium for player 2 in Period 2 is decreasing. Then, premium equilibriums in Period 1 and Period 3 for players 1 and 3 are increasing, but premium equilibrium in Period 2 for player 2 is decreasing as compared with "Base case" (see **Table 4**).

5) Scenario 4:

Table 1. Basic case.

Player	I			II			III		
Period	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$E(Y)$				1					
k_q				3					
r_f				0.00					
$\sigma(Y)$				10.488					
K_j	2807.190			2367.231			2006.917		
$\beta_j(k)$	3.0	3.0	3.0	3.8	3.8	3.8	4.6	4.6	4.6
$e_j(k)$	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
$\pi_j(k)$	1.10	1.10	1.10	1.117	1.117	1.117	1.083	1.083	1.083
$N_j(k)$	4500	4500	4500	3200	3200	3200	2300	2300	2300
equil/prem	1.544	1.544	1.544	1.511	1.511	1.511	1.471	1.471	1.471

Table 2. Scenario 1.

Player	I			II			III		
Period	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$E(Y)$				1					
k_q				3					
r_f				0.05					
$\sigma(Y)$				10.488					
K_j	2807.190			2367.231			2006.917		
$\beta_j(k)$	3.5	3.5	3.5	3.8	3.8	3.8	4.6	4.6	4.6
$e_j(k)$	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
$\pi_j(k)$	1.10	1.10	1.10	1.117	1.117	1.117	1.083	1.083	1.083
$N_j(k)$	4500	4500	4500	3200	3200	3200	2300	2300	2300
equil/prem	1.494	1.494	1.494	1.488	1.488	1.488	1.449	1.449	1.449

Finally, we assume that $\gamma_j(k) = 1, j = 1, \dots, 4; k = 1, 2, 3$. Let the economic factor be -3 (which means that the economy is deteriorated) in Period 1, 0 in Period 2 and 3 (which means that the economy is raised) in Period 3. If the economic factor is equal to -3 , then the number of uninsured people (which corresponds to inactive state) increases up to $10000 - N_j(1) \times 3 = 8701$. If economic factor is equal to 3 , then the number of uninsured people (which corresponds to inactive state) decreases down to $10000 - N_j(3) \times 3 = 163$. The results are presented in **Table 5**.

Table 3. Scenario 2.

Player	I			II			III		
Period	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$E(Y)$				1					
k_q				3					
r_f				0.05					
$\sigma(Y)$				10.488					
K_j	2807.190			2367.231			2006.917		
$\beta_j(k)$	3.0	3.5	3.0	3.8	3.9	3.8	4.6	5.6	4.6
$e_j(k)$	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
$\pi_j(k)$	1.10	1.10	1.10	1.117	1.117	1.117	1.083	1.083	1.083
$N_j(k)$	4500	4500	4500	3200	3200	3200	2300	2300	2300
equil/prem	1.544	1.472	1.544	1.511	1.463	1.510	1.471	1.406	1.471

Table 4. Scenario 3.

Player	I			II			III		
Period	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$E(Y)$				1					
k_q				3					
r_f				0.05					
$\sigma(Y)$				10.488					
K_j	2807.190			2367.231			2006.917		
$\beta_j(k)$	3.0	3.0	3.0	3.8	3.8	3.8	4.6	4.6	4.6
$e_j(k)$	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
$\pi_j(k)$	1.15	1.10	1.10	1.117	1.100	1.117	1.083	1.083	1.183
$N_j(k)$	4500	4500	4500	3200	3200	3200	2300	2300	2300
equil/prem	1.580	1.538	1.579	1.527	1.499	1.544	1.487	1.466	1.542

Table 5. Scenario 4.

Player	I			II			III		
Period	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$E(Y)$				1					
k_q				6.0					
r_f				0.05					
$\sigma(Y)$				10.488					
K_j	2807.190			2367.231			2006.917		
$\beta_j(k)$	3.0	3.0	3.0	3.8	3.8	3.8	4.6	4.6	4.6
$e_j(k)$	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
$\pi_j(k)$	1.10	1.10	1.10	1.117	1.117	1.117	1.083	1.083	1.083
$N_j(k)$	433	2500	3279	433	2500	3279	433	2500	3279
equil/prem	1.676	1.633	1.676	1.619	1.590	1.638	1.685	1.660	1.741

5. Conclusion

In this paper, we aim to investigate an extension of the one-period model in non-life insurance markets (cf. [1]) by introducing a transition probability matrix depending on some economic factors. In the future, we concentrate on alternative ways of the extension including generalized Nash equilibrium (see, for instance [11] and [12]) formulations. Moreover, it would be interesting to investigate in more detail about economic factors that influence in our model.

Acknowledgements

The research funding was provided by the “L2766-MON: Higher Education Reform” project financed by the Asian Development Bank and executed by the Ministry of Education, Culture, Science and Sports of Mongolia.

Conflicts of Interest

The authors declare no conflicts of interest regarding the publication of this paper.

References

- [1] Dutang, C., Albrecher, H. and Loisel, S. (2013) Competition among Non-Life Insurers under Solvency Constraints: A Game-Theoretic Approach. *The European Journal of Operational Research*, **231**, 702-711.
<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.06.029>
- [2] Albrecher, H. and Dalit, D-A. (2017) On Effects of Asymmetric Information on Non-Life Insurance Prices under Competition. *International Journal of Data Analysis Techniques and Strategies*, **9**, 287-299.
<https://doi.org/10.1504/IJDATS.2017.088355>
- [3] Boonen, T.J., Pantelous, A.A. and Wu, R. (2018) Non-Cooperative Dynamic Games for General Insurance Markets. *Insurance: Mathematics and Economics*, **78**, 123-135.
<https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2017.12.001>
- [4] Wu, R. and Pantelous, A.A. (2017) Potential Games with Aggregation in Non-Cooperative General Insurance Markets. *ASTIN Bulletin*, **47**, 269-302.
<https://doi.org/10.1017/asb.2016.31>
- [5] Rees, R., Gravelle, H. and Wambach, A. (1999) Regulation of Insurance Markets. *The Geneva Paper on Risk and Insurance Theory*, **24**, 55-68.
<https://doi.org/10.1023/A:100873315931>
- [6] Durrett, R. (2012) Essentials of Stochastic Processes. Springer Texts in Statistics, Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3615-7>
- [7] McFadden, D. (1981) Econometric Models of Probabilistic Choice, Structural Analysis of Discrete Data with Econometric Applications. The MIT Press, 198-272.
- [8] Rosen, J.B. (1965) Existence and Uniqueness of Equilibrium Points for Concave N-Person Games. *Econometrica*, **33**, 520-534.
- [9] Facchinei, F. and Pang, J.S. (2003) Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. *Computational Science & Engineering*, **2**.
- [10] Solodov, M.V. and Svaiter, B.F. (1999) A New Projection Method for Variational Inequality Problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **37**, 765-776.
<https://doi.org/10.1137/S0363012997317475>

- [11] Altangerel, L. and Battur, G. (2012) Perturbation Approach to Generalized Nash Equilibrium Problems. *Optimization Letters*, **6**, 1379-1391.
<https://doi.org/10.1007/s11590-012-0510-8>
- [12] Facchinei, F. and Kanzow, C. (2010) Generalized Nash Equilibrium Problems. *Annals of Operations Research*, **175**, 177-211.
<https://doi.org/10.1007/s10479-009-0653-x>

Өөрийн хөрөнгийн хүрэлцээний зааглалттай банкны зээлийн хүүгийн өрсөлдөөний загвар

Г.Баттулга¹, Л.Алтангэрэл², Г.Баттөр¹

¹МУИС-ХШУИС, ²МГТИС

2019/03/28

Банкны салбарын 95 жилийн ойн
эрдэм шинжилгээний бага хурал

Агуулга

1 Загварын томъёолол

2 Онолын үр дүн

3 Тоон туршилт

-  Acerbi, C; Tasche, D. *On the Coherence of Expected Shortfall*, Journal of Banking & Finance 26(7), 1487-1503, 2002.
-  Battulga, G; Altangerel, L; Battur, G. *An Extension of One-Period Nash Equilibrium Model in Non-Life Insurance Markets*, Applied Mathematics 9, 1339-1350, 2018.
-  Dutang, C.; Albrecher, H.; Loisel, S. *Competition among non-life insurers under solvency constraints: a game-theoretic approach*, European J. Oper. Res., 231(3):702–711, 2013.
-  Frey, R; McNeil, A.J. *Dependent defaults in models of portfolio credit risk*, Journal of Risk 6(1):59-92, 2003.

1. Загварын томъёолол

Загварын тавил

$$\max_{x_j \in X_j} O_j(x), \quad j = 1, \dots, N.$$

Загварын параметрүүд

- N - Зах зээлд зээлийн хүүгээрээ өрсөлддөг банкуудын тоо;
- R - Зээлийн зэрэглэлийн (AAA, AA+ гэх мэт) тоо;
- $p_i(\Psi)$ - Эрсдэлийн хүчин зүйл (э/з-ийн хүчин зүйл) Ψ нөхцөлд i -р зээлийн зэрэглэлтэй зээл дефолт болох магадлал, $p_i(\cdot)$ эрс өсдөг функц;
- Δ_i - i -р зэрэглэлтэй зээл дефолт болсон нөхцөлд тухайн зээлээс банкинд учрах алдагдал (LGD), $\Delta_i \in (0, 1]$;
- $L_{i,n}$ - n -р банкны хувьд i -р зээлийн зэрэглэлтэй зээлийн нийт үлдэгдэл;
- $X_{i,n}$ - n -р банкны i -р зэрэглэлтэй зээлийн хүү;
- $\pi_{i,n}$ - n -р банкны i -р зээлийн зэрэглэлд харгалзах хугарлын цэгийн хүү.

Тохиргоо хийсний дараах цэвэр хүүгийн орлого

$$O_n(x) = \sum_{i=1}^R L_{i,n} (1 - \beta_{i,n}^L (x_{i,n} - m(x_{i,n}))) (x_{i,n} - \pi_{i,n}) \quad (1)$$

- $\beta_{i,n}^L > 0$ - хүүгийн мэдрэмжийн параметр;
- $x = (x_1^T, \dots, x_N^T)^T$ - нийт тоглогчдын зээлийн хүү;
- $x_n = (x_{1,n}, \dots, x_{R,n})^T$ - n -р банкны зээлийн зэрэглэлтэй холбоотой хүүнүүд;
- $m(z_{i,n}) = \frac{1}{N-1} \sum_{k \neq n} z_{i,k}$ - бусад тоглогчдын санал болгож буй зээлийн хүүнүүдийн дундаж.

n -р банкинд учрах санамсаргүй зээлийн алдагдал

$$Q_n := \sum_{i=1}^R \sum_{k=1}^{m_{i,n}} e_{i,k,n} \Delta_i Y_{i,k,n}.$$

$m_{i,n}$ - i -р банкны хувьд i -р зээлийн рейтингтэй зээлдэгчийн тоо;

$Y_{i,k,n}$ - k -р зээлдэгч дефолт болсон бол 1, дефолт болоогүй бол 0-ийг авах дефолт индикаторын санамсаргүй хэмжигдэхүүн;

$e_{i,k,n}$ - зээлийн үлдэгдэл.

Эрсдэлийн хүчин зүйл Ψ үеийн дундаж алдагдлын хэмжээ

$$\mathbb{E}(Q_n|\Psi) := \sum_{i=1}^R \sum_{k=1}^{m_{i,n}} e_{i,k,n} \Delta_i \mathbb{E}(Y_{i,k,n}|\Psi) = \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i p_i(\Psi)$$

- $p_i(\Psi) = \mathbb{P}(Y_{i,k,n} = 1|\Psi)$ $k = 1, \dots, m_{i,n}$ - k -р зээлдэгч дефолт болох магадлал;
- $L_{i,n} = \sum_{k=1}^{m_{i,n}} e_{i,k,n}$ - нийт зээлийн үлдэгдэл.

Q_n -ийн α эрэмбийн квантилийн хувьд ойролцоо томъёо

$$q_\alpha(Q_n) \approx \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i p_i(q_\alpha(\Psi)),$$

- $q_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\}$ нь X санамсаргүй хэмжигдэхүүний α эрэмбийн квантиль.

Өөрийн хөрөнгийн зааглалтын стратегийн олонлог: Basel II

$$\begin{aligned} X_n^1 : &= \left\{ x_n \in \prod_{i=1}^R [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \mid K_n + \sum_{i=1}^R L_{i,n} (x_{i,n} - \pi_{i,n})(1 - e_n) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i p_i(\Psi) \geq \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i p_i(q_\alpha(\Psi)) \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

e_n - банкны зардал;

K_n - n -р банкны капиталын (өөрийн хөрөнгийн) хэмжээ.

Өөрийн хөрөнгийн зааглалтын стратегийн олонлог: Basel I

$$X_n^2 : = \left\{ x_n \in \prod_{i=1}^R [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \mid K_n + \sum_{i=1}^R L_{i,n}(x_{i,n} - \pi_{i,n})(1 - e_n) \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i p_i(\Psi) \geq c \sum_{i=1}^R L_{i,n} w_i \right\} \quad (3)$$

c - эрсдэлээр жигнэсэн активын хувь, c нь Basel I-8%, Монголбанк-14%;

w_i - i -р зээлийн рейтингтэй зээлийн хувьд эрсдэлийн жин.

Expected Shortfall

$$\text{ES}_{\alpha}(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 q_u(X) du$$

- $\text{ES}_{\alpha}(X)$ - уялдсан (coherent) эрсдэлийн хэмжээс;
- $\text{VaR}_{\alpha}(X)$ - субаддитив нөхцлийг хангагдаггүй.

Зээлийн багцын ES-ийн хувьд ойролцоо томъёо

$$ES_{\alpha}(Q_n) \approx \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i \int_{\alpha}^1 p_i[q_u(\Psi)] du,$$

- $h_i(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 p_i[q_u(\Psi)] du$ нь тасралтгүй, үл буурах функц.

Өөрийн хөрөнгийн зааглалтын стратегийн олонлог: ES

$$\begin{aligned} X_n^3 : &= \left\{ x_n \in \prod_{i=1}^R [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \mid K_n + \sum_{i=1}^R L_{i,n} (x_{i,n} - \pi_{i,n})(1 - e_n) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i p_i(\Psi) \geq \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i \int_{\alpha}^1 p_i[q_u(\Psi)] du \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

2. Онолын үр дүн

Өгүүлбэр

(1)-ээр тодорхойлогдох зорилгын функц, (2) эсвэл (3) эсвэл (4)-өөр тодорхойлогдох төлбөрийн чадварын зааглалтуудтай N тоглогчтой банкны тоглоом нь шийдтэй бөгөөд цор ганц Нэшийн хүүгийн тэнцвэрийн цэгтэй байна.

Өгүүлбэр

x^* нь N тоглогчтой Basel II банкны тоглоомын тэнцвэрт зээлийн хүүнүүд байг. Тэгвэл,

- ❶ Basel II өөрийн хөрөнгийн хүрэлцээний зааглалтын нөхцөлд n -р тоглогчид харгалзах зээлийн тэнцвэрт хүү $x_{k,n}^* \in]\underline{x}_k, \bar{x}_k[$ нь загварын параметрүүдээс доорх байдлаар хамаарна:
 - (i) тэнцвэрт зээлийн хүү банкны зардал e_n , дефолт болоход банкинд учрах алдагдлын хувь Δ_i , эрсдэлийн хүчин зүйл Ψ ба итгэх түвшин α өсөхөд (буурахад) дагаж өсөх (буурах) бол
 - (ii) мэдрэмжийн параметр $\beta_{i,n}^L$ болон K_n капитал өсөхөд (буурахад) буурна (өснө).
- ❷ Хэрэв өөрийн хөрөнгийн хүрэлцээний зааглалт идэвхигүй бол тэнцвэрт хүү нь дараах систем тэгшитгэлийн шийд байна:

$$M_\beta x^* = v,$$

Санамж

Банкны зах зээлд нийт S тооны хадгаламжийн бүтээгдэхүүн (харилцах, хугацаагүй хадгаламж гэх мэт) санал болгодог, j -р хадгаламжийн бүтээгдэхүүний хэмжээ $D_{j,n}$ ба харгалзах хүү нь $y_{j,n}$ байг. Тэгвэл тохиргоо хийсний дараах цэвэр хүүгийн орлого дараах хэлбэртэй:

$$O_n(x, y) = \sum_{i=1}^R L_{i,n}(1 - \beta_{i,n}^L(x_{i,n} - m(x_{i,n})))x_{i,n} - \sum_{j=1}^S D_{j,n}(1 + \beta_{j,n}^D(y_{j,n} - m(y_{j,n})))y_{j,n},$$

- $\beta_{i,n}^L > 0$, $\beta_{j,n}^D > 0$ нь харгалзан зээлийн болон хадгаламжийн хүүний мэдрэмжийн параметрууд;
- $y = (y_1^T, \dots, y_N^T)^T$ нь нийт тоглогчдын хадгаламжийн хүү;
- $y_n = (y_{1,n}^T, \dots, y_{S,n}^T)^T$ нь n -дүгээр банкны хадгаламжийн бүтээгдэхүүнд харгалзах хүүнүүд.

Тухайлбал, Basel II төлбөрийн чадварын зааглалт дараах хэлбэртэй бичигдэнэ:

$$\begin{aligned} g_n^1(x_n, y_n) &= K_n + \sum_{i=1}^R L_{i,n} x_{i,n} (1 - e_n^L) - \sum_{j=1}^S D_{j,n} y_{j,n} (1 + e_n^D) \\ &- \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i p_i(\Psi) - \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i p_i(q_\alpha(\Psi)), \end{aligned}$$

e_n^L - зээлтэй холбоотой зардал;

e_n^D - хадгаламжтай холбоотой зардал.

Санамж

- ④ Basel I, ES өөрийн хөрөнгийн хүрэлцээний зааглалттай банкны Нэшийн тоглоомын хувьд ижил үр дүнг томъёолж болно.
- ⑤ Зорилгын функцэд тохиргоо хийсний дараах зээлээс хүлээгдэж буй алдагдлыг нэмбэл дараах байдлаар бичигдэнэ:

$$O_n(x, y) = \sum_{i=1}^R L_{i,n} (1 - \beta_{i,n}^L (x_{i,n} - m(x_{i,n}))) (x_{i,n} - \pi_{i,n} - \Delta_i p_i(\Psi))$$

Энэ тохиолдолд өөрийн хөрөнгийн зааглалт идэвхгүй байсан ч тэнцвэрт хүү дефолт болох магадлал $p_i(\Psi)$ болон LGD Δ_i -ээс хамаарна.

3. Тоон туршилт

Хүснэгт: Сонгон авсан банкуудын гол үзүүлэлтүүд

	Зээл	ӨХ	ӨХ/Зээл	ЭЖА%	ЭЖА	ЗХО%	Х3%	Зард
Банк1	3109.8	521.2	16.76%	14.60%	3569.7	11.78%	10.58%	-1.57%
Банк2	1753.3	208.2	11.87%	15.63%	1331.8	14.77%	11.80%	6.46%
Банк3	383.9	81.0	21.10%	17.41%	465.3	14.26%	12.12%	26.04%

- 2018 оны IV улирлын үзүүлэлтүүд

Хүснэгт: Параметрийн үнэлэлт

	μ_i	σ_i	π_i	π_i^2	ρ_i
BBB	-3.089	0.428	0.226%	0.002%	0.602%
BB	-2.534	0.390	0.911%	0.020%	1.253%
B	-1.831	0.396	4.436%	0.340%	3.385%

- "2017 Annual Global Corporate Default Study and Rating Transitions"
- 1981-2017 оны дефолт хувийг ашигласан
- $\rho_i(\Psi) = \Phi(\mu_i + \sigma_i\Psi)$ -Probit Normal загвар

Хүснэгт: Эдийн засгийн нөхцлүүд дэх дефолт болох магадлалууд

Ψ	-2	-1	0	1	2	3	4	$q_{0.999} = 3.09$
BBB	0.00%	0.02%	0.10%	0.39%	1.28%	3.55%	8.42%	3.86%
BB	0.05%	0.17%	0.56%	1.60%	3.97%	8.62%	16.48%	9.18%
B	0.44%	1.30%	3.36%	7.57%	14.93%	25.99%	40.21%	27.16%

Хүснэгт: Тэнцвэрт хүүгийн тооцоолол

	Bis-II ₁	Bis-II ₃	Bis-II ₄	Bis-II ₅	Bis-II ₆	Bis-II ₇	Bis-II ₈	Bis-II ₁₀
s_1	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%
s_2	40%	40%	40%	40%	40%	40%	40%	40%
s_3	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%
K	1	1	1	1	1	1	1	1.5
β	30	30	30	30	30	30	40	30
π	0%	0%	0%	0%	-1%	1%	0%	0%
Ψ	0	4	4	4	4	4	0	4
α	99.9%	99.9%	99.0%	99.0%	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%
Δ	60%	60%	60%	40%	60%	60%	60%	60%
$x_{1,1}^*$	0.1447	0.1649	0.1544	0.1447	0.1549	0.1749	0.1363	0.1447
$x_{2,1}^*$	0.1447	0.1649	0.1544	0.1447	0.1549	0.1749	0.1363	0.1447
$x_{3,1}^*$	0.1447	0.1649	0.1544	0.1447	0.1549	0.1749	0.1363	0.1447
$x_{1,2}^*$	0.1495	0.2103	0.1787	0.1495	0.2003	0.2203	0.1412	0.1495
$x_{2,2}^*$	0.1495	0.2103	0.1787	0.1495	0.2003	0.2203	0.1412	0.1495
$x_{3,2}^*$	0.1495	0.2103	0.1787	0.1495	0.2003	0.2203	0.1412	0.1495
$x_{1,3}^*$	0.1508	0.1711	0.1605	0.1508	0.1610	0.1811	0.1425	0.1508
$x_{2,3}^*$	0.1508	0.1711	0.1605	0.1508	0.1611	0.1811	0.1425	0.1508
$x_{3,3}^*$	0.1508	0.1711	0.1605	0.1508	0.1610	0.1811	0.1425	0.1508

Хүснэгт: Тэнцвэрт хүүгийн тооцоолол

	Bis-II ₁₃	Bis-II ₁₄	Bis-II ₁₅	Bis-II ₁₆	ES ₁	ES ₂	ES ₃	ES ₄
s ₁	98%	1%	30%	30%	30%	30%	30%	30%
s ₂	1%	1%	40%	40%	40%	40%	40%	40%
s ₃	1%	98%	30%	30%	30%	30%	30%	30%
K	1	1	1	1	1	1	1	1
β	30	30	50-40-20	50-40-20	30	30	50-40-20	50-40-20
π	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Ψ	0	4	0	4	0	4	0	4
α	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%
Δ	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%
x _{1,1} *	0.1447	0.3367	0.1313	0.1449	0.1447	0.1699	0.1313	0.1481
x _{2,1} *	0.1446	0.3367	0.1363	0.1533	0.1447	0.1699	0.1363	0.1573
x _{3,1} *	0.1446	0.3367	0.1613	0.1952	0.1447	0.1699	0.1613	0.2032
x _{1,2} *	0.1495	0.4172	0.1362	0.1769	0.1495	0.2252	0.1362	0.1865
x _{2,2} *	0.1495	0.4172	0.1412	0.1921	0.1495	0.2252	0.1412	0.2041
x _{3,2} *	0.1495	0.4172	0.1662	0.2679	0.1495	0.2252	0.1662	0.2920
x _{1,3} *	0.1508	0.3745	0.1375	0.1510	0.1508	0.1760	0.1375	0.1542
x _{2,3} *	0.1507	0.3745	0.1425	0.1594	0.1508	0.1760	0.1425	0.1634
x _{3,3} *	0.1507	0.3745	0.1675	0.2014	0.1508	0.1760	0.1675	0.2094

Хүснэгт: Тэнцвэрт хүүгийн тооцоолол

	Bis-I ₁ ^{14%}	Bis-I ₂ ^{14%}	Bis-I ₃ ^{14%}	Bis-I ₄ ^{14%}	Bis-I ₅ ^{12%}	Bis-I ₆ ^{12%}	Bis-I ₇ ^{8%}	Bis-I ₈ ^{8%}
s ₁	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%
s ₂	40%	40%	40%	40%	40%	40%	40%	40%
s ₃	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%	30%
K	1	1	1	1	1	1	1	1
β	50-40-20	50-40-20	30	30	50-40-20	30	50-40-20	30
π	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Ψ	0	4	0	4	4	4	4	4
α	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%
Δ	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%	60%
x _{1,1} *	0.1313	0.1861	0.1447	0.2272	0.1712	0.2041	0.1413	0.1588
x _{2,1} *	0.1363	0.2048	0.1447	0.2272	0.1861	0.2041	0.1488	0.1588
x _{3,1} *	0.1613	0.2982	0.1447	0.2272	0.2609	0.2041	0.1863	0.1588
x _{1,2} *	0.1362	0.1965	0.1495	0.2407	0.1860	0.2244	0.1651	0.1919
x _{2,2} *	0.1412	0.2166	0.1495	0.2407	0.2035	0.2244	0.1773	0.1919
x _{3,2} *	0.1662	0.3170	0.1495	0.2407	0.2908	0.2244	0.2384	0.1919
x _{1,3} *	0.1375	0.1946	0.1508	0.2371	0.1735	0.2043	0.1472	0.1649
x _{2,3} *	0.1425	0.2139	0.1508	0.2371	0.1875	0.2043	0.1546	0.1649
x _{3,3} *	0.1675	0.3104	0.1508	0.2371	0.2575	0.2043	0.1918	0.1649

Хүснэгт: Зорилгын функцэд зээлийн алдагдлыг нэмсэн үеийн зээлийн хүүгийн тооцоолол

	Bis-II ₁	Bis-II ₂	Bis-II ₃	Bis-II ₄	Bis-II ₅	Bis-II ₆
s_1	30%	30%	30%	30%	30%	30%
s_2	40%	40%	40%	40%	40%	40%
s_3	30%	30%	30%	30%	30%	30%
K	1	1	1	1	1	1
β	30	30	30	30	30	30
π	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Ψ	0	2	-2	0	2	-2
α	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%
Δ	60%	60%	60%	30%	30%	30%
$x_{1,1}^*$	0.1453	0.1523	0.1447	0.1450	0.1485	0.1447
$x_{2,1}^*$	0.1480	0.1685	0.1449	0.1463	0.1566	0.1448
$x_{3,1}^*$	0.1648	0.2343	0.1473	0.1547	0.1895	0.1460
$x_{1,2}^*$	0.1501	0.1572	0.1496	0.1498	0.1534	0.1495
$x_{2,2}^*$	0.1529	0.1733	0.1498	0.1512	0.1614	0.1497
$x_{3,2}^*$	0.1697	0.2391	0.1522	0.1596	0.1943	0.1508
$x_{1,3}^*$	0.1514	0.1585	0.1508	0.1511	0.1546	0.1508
$x_{2,3}^*$	0.1542	0.1746	0.1511	0.1525	0.1627	0.1510
$x_{3,3}^*$	0.1710	0.2404	0.1534	0.1609	0.1956	0.1521

Дүгнэлт

- Банкны зах зээлд өөрийн хөрөнгийн зааглалтын стратегийн олонлог бүхий тоглоомын онолын загварыг анх удаа томъёолж, онолын үр дүнг туршилтаар баталгаажуулсан.
- Эдийн засаг сайн буюу хэвийн ($\Psi \leq 0$) үед Basel I, Basel II, ES зааглалттай загварууд ижил үр дүнг өгч байна.
- Эдийн засаг эрс муудсан $\Psi = 4 > q_{0.999}(\Psi) = 3.09$ үед банкууд өөрийн хөрөнгөө нэмэгдүүлээгүй үед төв банкнаас шаардсан өөрийн хөрөнгийн хүрэлцээг хангахын тулд зээлийн хүүгээ өсгөхөөс өөр аргагүйд хүрч байна.
- Эдийн засаг эрс муудсан үед банкуудын хувьд хангахад хамгийн хэцүү өөрийн хөрөнгийн зааглалт нь 14%-ийн Basel-I, удаах зааглалт нь ES, харин хамгийн гайгүй зааглалт нь Basel-II байна.
- Зээлийн хүүг бууруулахын тулд зээлийн хүүгийн зардал буюу хадгаламжийн хүүг бууруулах шаардлагатай.
- Зээл, хадгаламжийн хүүний өрсөлдөөний загварын хувьд хадгаламжийн хүүнд дээд зааг тавих замаар банкуудын тэнцвэрт зээлийн хүүг тодорхойлж болно.

Анхаарал тавьсанд баярлалаа

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

DYNAMIC SYSTEMS AND OPTIMAL CONTROL



Серия «Математика»
2020. Т. 32. С. 3–16

Онлайн-доступ к журналу:
<http://mathizv.isu.ru>

И З В Е С Т И Я
Иркутского
государственного
университета

УДК 518.517

MSC 123

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.3>

An Exact Penalty Approach and Conjugate Duality for Generalized Nash Equilibrium Problems with Coupling and Shared Constraints*

L. Altangerel¹, G. Battur²

¹German-Mongolian Institute for Resources and Technology, Nalaikh, Mongolia

²Center of Mathematics for Applications and Department of Applied Mathematics,
National University of Mongolia, Ulaanbaatar, Mongolia

Abstract. Generalized Nash Equilibrium Problems (GNEP) have been attracted by many researchers in the field of game theory, operational research, engineering, economics as well as telecommunication in recent two decades. One of the most important classes of GNEP is a convex GNEP with jointly convex or shared constraints which has been studied extensively. It is considered to be one of the most challenging classes of problems in the field. Moreover, there is a gap in the studies on the GNEP with coupling and shared constraints. The aim of this paper is to investigate the relationship between an exact penalty approach and conjugate duality in convex optimization for the GNEP with coupling and shared constraints. In association with necessary optimality conditions, we obtained the parameterized variational inequality problems. This problem has provided an opportunity to solve many other GNEs. Some numerical results are also presented.

Keywords: generalized Nash equilibrium problems, exact penalty function, conjugate duality, coupling and shared constraints.

* This research was partially supported by the Mongolian Foundation for Science and Technology.

1. Introduction

The GNEP is the extension of the classical Nash equilibrium problem (NEP) in which each player's strategy set depends on the rival player's strategies. Since the mid-1990s many efforts have been devoted to the investigation of GNEP (see [4; 9; 11; 13]), because it has many interesting applications in the fields of economics, operational research and engineering. For instance, Wei and Smeers [15] formulated oligopolistic electricity models as GNEPs. Pang and Fukushima [10] considered a GNEP from multi-leader-follower games.

It is well-known that in the classic NEP to each player corresponds convex programming problem, and it can be reduced to a variational inequality problem (VIP). This formulation provides a powerful theoretical and computational framework [8] for the solution of the classical NEP. On the other hand, the GNEP can be reduced to a quasi-variational inequality problem (QVI) (see [12]). Unfortunately, comparing the VIP, there are few methods available for solving a QVI efficiently.

In recent years, the penalty function methods which are based on eliminating the difficult coupling constraints in the GNEP have been attracted by many researchers. Recently, Fukushima and Pang [10] proposed a sequential penalty approach to GNEP, which is reduced the GNEP to smooth NEP's for values of penalty parameter increasing to infinity. Facchinei and Pang [6] proposed the exact penalization techniques whereby the GNEP is reduced to the solution of a single nonsmooth NEP with a finite value of the penalty parameter. More recently, Facchinei and Lamariello [7] proposed the partial penalization techniques to GNEP with coupling constraints.

On the other hand, from a practical point of view, it is important to find possible many solutions of GNEP (see [1] and [14]).

In this paper, we consider the GNEP with coupling and shared constraints, and aim to show how an exact penalty approach can be related to conjugate duality in convex optimization for GNEP. After penalizing only the coupling constraints, the problem reduces to the penalized GNEP with shared constraints. Analyzing special perturbation function and the formulating optimality conditions for corresponding dual problem, one gets the parameterized variational inequality problem which allows us to find possible many solutions for GNEP.

This paper is organized as follows. The next section deals with an exact penalty approach for GNEP with coupling and shared constraints. In Section 3,4 we obtain the parameterized variational inequality problem based on necessary optimality conditions for primal-dual problems for solving GNEP and show some numerical results.

2. Problem formulation and penalty function approach

The GNEP consists of N players, and each player's strategy set depends on rival players' strategies. Let $x_k \in \mathbb{R}^{n_k}$, $n_k \in \mathbb{N}$ be a player k 's strategy and $x := (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^n$, $n := \sum_{k=1}^N n_k$. By x_{-k} denotes all players' strategies except those of player k , i.e., $x_{-k} := (x_{k'})_{k'=1, k' \neq k}^N \in \mathbb{R}^{n-k}$, and $n_{-k} := n - n_k$. Let $\theta_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{1, N}$, be continuously differentiable functions such that θ_k is convex with respect to k -th variable. Assume that functions $h_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_k}$, $k = \overline{1, N}$, are vector-valued convex with respect to k -th variable, and $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ is a vector-valued convex function. We consider the GNEP which consists in finding $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) \in \mathbb{R}^n$ such that each player's strategy $\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{n_k}$, $k = \overline{1, N}$ is a solution to the problem

$$\begin{aligned} P_k(\bar{x}_{-k}) & \inf_{x_k} \theta_k(x_k, \bar{x}_{-k}) \\ \text{s.t. } & h_k(x_k, \bar{x}_{-k}) \leq 0, \\ & g(x_k, \bar{x}_{-k}) \leq 0, \end{aligned}$$

which is the GNEP with coupling and shared constraints. For any $x, y \in \mathbb{R}^s$, $x \underset{s}{\leq} y$ means

$$y - x \in \mathbb{R}_+^s := \{z = (z_1, \dots, z_s) \in \mathbb{R}^s \mid z_i \geq 0, i = \overline{1, s}\}.$$

Using the notation $l^+ = \max(l, 0)$ for a given function $l : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$, the exact penalty function is defined by

$$\|c^+(x)\| := \sum_{i=1}^s c_i^+(x),$$

where $c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$, $c(x) = (c_1(x), \dots, c_s(x))$, and $x \in \mathbb{R}^n$. Then the GNEP reduces to the problem GNEP_{pen} which consists in finding $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) \in \mathbb{R}^n$ such that each player's strategy $\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{n_k}$, $k = \overline{1, N}$ is a solution to the penalized problem

$$\begin{aligned} P_{k,p}(\bar{x}_{-k}) & \inf_{x_k} [\theta_k(x_k, \bar{x}_{-k}) + \rho_k \cdot \|h_k^+(x_k, \bar{x}_{-k})\|] \\ \text{s.t. } & g(x_k, \bar{x}_{-k}) \leq 0, \end{aligned}$$

which turns out to be the penalized GNEP with shared constraints and nonsmooth cost functions (see [1]), where $\rho_k \geq 0$, $k = \overline{1, N}$, are parameters. Introducing auxiliary variables $y = (y_1, \dots, y_N)$, $y_k \in \mathbb{R}^{m_k}$, $k = \overline{1, N}$, let us consider the problem GNEP_{aux} which consists in finding $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $m =$

$m_1 + \dots + m_N$ such that $(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \in \mathbb{R}^{n_k} \times \mathbb{R}^{m_k}$, $k = \overline{1, N}$ is a solution to the problem (cf. [3])

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{k,p}(\bar{x}_{-k}) &= \inf_{(x_k, y_k)} \left[\theta_k(x_k, \bar{x}_{-k}) + \rho_k \sum_{j=1}^{m_k} y_{k,j} \right] \\ \text{s.t. } &g(x_k, \bar{x}_{-k}) \leq \frac{l}{l}, \\ &h_k(x_k, \bar{x}_{-k}) - y_k \leq 0, \\ &0 \leq y_k, \end{aligned}$$

where $y_k := (y_{k,1}, \dots, y_{k,m_k})^T \in \mathbb{R}^{m_k}$.

Proposition 1. *For a fixed $x_{-k} \in \mathbb{R}^{n_{-k}}$, $k = \overline{1, N}$, it holds*

$$v(P_{k,p}(x_{-k})) = v(\tilde{P}_{k,p}(x_{-k})),$$

where by $v(P)$ we denote the optimal value of the problem (P) .

Proof. Let $x_{-k} \in \mathbb{R}^{n_{-k}}$ be fixed and $x_k \in \mathbb{R}^{n_k}$ be feasible to the problem $P_{k,p}(x_{-k})$. Denoting $y_{k,j} = h_{k,j}^+(x_k, x_{-k})$ implies that $y_{k,j} \geq h_{k,j}(x_k, x_{-k})$ and $y_{k,j} \geq 0$, $j = \overline{1, m_k}$. Whence (x_k, y_k) is feasible to the problem $\tilde{P}_{k,p}(x_{-k})$, where $y_k = (y_{k,1}, \dots, y_{k,m_k})$ and

$$h_k(x_k, x_{-k}) = (h_{k,1}(x_k, x_{-k}), \dots, h_{k,m_k}(x_k, x_{-k})).$$

Consequently, we have

$$\begin{aligned} &\theta_k(x_k, x_{-k}) + \rho_k \|h_k^+(x_k, x_{-k})\| \\ &= \theta_k(x_k, x_{-k}) + \rho_k \sum_{j=1}^{m_k} h_{k,j}^+(x_k, x_{-k}) \\ &= \theta_k(x_k, x_{-k}) + \rho_k \sum_{j=1}^{m_k} y_{k,j} \geq v(\tilde{P}_{k,p}(x_{-k})). \end{aligned}$$

Taking the infimum over all (x_k, y_k) in the left side of the inequality, one gets $v(P_{k,p}(x_{-k})) \geq v(\tilde{P}_{k,p}(x_{-k}))$.

Conversely, let (x_k, y_k) be feasible to problem $\tilde{P}_{k,p}(x_{-k})$. Since x_k is feasible to $P_{k,p}(x_{-k})$, we obtain that

$$\begin{aligned} v(P_{k,p}(x_{-k})) &\leq \theta_k(x_k, x_{-k}) + \rho_k \sum_{j=1}^{m_k} h_{k,j}^+(x_k, x_{-k}) \\ &\leq \theta_k(x_k, x_{-k}) + \rho_k \sum_{j=1}^{m_k} y_{k,j}. \end{aligned}$$

Taking the infimum over all (x_k, y_k) in the right side of the inequality, one gets $v(P_{k,p}(x_{-k})) \leq v(\tilde{P}_{k,p}(x_{-k}))$. In conclusion, we have

$$v(P_{k,p}(x_{-k})) = v(\tilde{P}_{k,p}(x_{-k})).$$

□

3. Parameterized variational inequality via duality and optimality conditions

Duality theory plays important role in convex optimization. For the excellent comprehensive survey dealing with conjugate duality we refer to [2]. Before go into detail, let us give a short summary about conjugate duality. Let $X \subseteq \mathbb{R}^n$ be a nonempty set and $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, $g = (g_1, \dots, g_m)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ be given functions. Let us consider the optimization problem

$$(P) \quad \inf_{x \in G} f(x), \quad G = \{x \in X \mid g(x) \leq_m 0\}.$$

We consider the function $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ fulfilling $\Phi(x, 0) = f(x)$ for all $x \in \mathbb{R}^n$. The function Φ is the so-called perturbation function of the problem (P) . One can obtain so-called perturbed problem

$$(P_y) \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \Phi(x, y).$$

The conjugate dual problem to (P_y) can be now formulated as being

$$(D) \quad \sup_{p \in \mathbb{R}^m} \left\{ -\Phi^*(0, p) \right\},$$

where $\Phi^* : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ is the conjugate function of Φ . The conjugate function of a given function $h : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ is defined by

$$h^*(p) := \sup_{x \in \mathbb{R}^l} [p^T x - h(x)].$$

Between the primal and the dual problems weak duality always holds, i.e.,

$$-\infty < \sup(D) \leq \inf(P) < +\infty.$$

In [2], different dual problems based on special perturbation functions have been investigated. Moreover, the strong duality results and optimality conditions have been proved.

Let us now consider a dual problem to $P_k(x_{-k})$ for a fixed $x_{-k} \in \mathbb{R}^{n-k}$, $k = \overline{1, N}$. In association with problem $\tilde{P}_{k,p}(x_{-k})$, one can introduce the perturbation function by

$$\Phi_k(x_k, x_{-k}, y_k) = \begin{cases} \theta_k(x_k, x_{-k}) + \rho_k \sum_{j=1}^{m_k} y_{kj}, & \text{if } g(x_k, x_{-k}) \leq 0, \\ h_k(x_k, x_{-k}) - y_k \frac{m_k}{m_k}, & h_k(x_k, x_{-k}) - y_k \leq 0, \\ +\infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then the corresponding conjugate function becomes

$$\begin{aligned} \Phi_k^*(p_k, x_{-k}, q_k) &= \sup_{\substack{x_k \in \mathbb{R}^{n_k} \\ y_k \in \mathbb{R}^{m_k}}} [p_k^T x_k + q_k^T y_k - \Phi(x_k, x_{-k}, y_k)] \\ &= \sup_{\substack{g(x_k, x_{-k}) \leq 0 \\ h_k(x_k, x_{-k}) - y_k \leq 0}} [p_k^T x_k + q_k^T y_k - \theta_k(x_k, x_{-k}) - \rho_k \sum_{j=1}^{m_k} y_{kj}], \end{aligned}$$

where $p_k, q_k \in \mathbb{R}^k$ are the perturbation variables. Taking z_k instead of y_k , by $z_k = h_k(x_k, x_{-k}) - y_k$, and using the notation $e_k = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{m_k}$, we have

$$\begin{aligned} \Phi_k^*(p_k, x_{-k}, q_k) &= \sup_{\substack{g(x_k, x_{-k}) \leq 0 \\ z_k \leq 0 \\ m_k}} [p_k^T x_k + q_k^T h_k(x_k, x_{-k}) - q_k^T z_k \\ &\quad - \theta_k(x_k, x_{-k}) - \rho_k e_k^T h_k(x_k, x_{-k}) + \rho_k e_k^T z_k] \\ &= \sup_{\substack{g(x_k, x_{-k}) \leq 0}} [p_k^T x_k + q_k^T h_k(x_k, x_{-k}) - \theta_k(x_k, x_{-k}) \\ &\quad - \rho_k e_k^T h_k(x_k, x_{-k})] + \sup_{\substack{z_k \leq 0 \\ m_k}} (\rho_k e_k - q_k)^T z_k. \end{aligned}$$

Taking the first variable by zero, it holds

$$\begin{aligned} \Phi_k^*(0, x_{-k}, q_k) &= \sup_{g(x_k, x_{-k}) \leq 0} [q_k^T h_k(x_k, x_{-k}) \\ &\quad - \theta_k(x_k, x_{-k}) - \rho_k e_k^T h_k(x_k, x_{-k})] + \sup_{\substack{z_k \leq 0 \\ m_k}} (\rho_k e_k - q_k)^T z_k. \end{aligned}$$

Since

$$\sup_{\substack{z_k \leq 0 \\ m_k}} (\rho_k e_k - q_k)^T z_k = \begin{cases} 0, & \rho_k e_k - q_k \geq 0, \\ +\infty, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

the dual problem for $P_k(x_{-k})$ can be written as

$$\begin{aligned}
D_k(x_{-k}) &= \sup_{q_k \in \mathbb{R}^{m_k}} [-\Phi_k^*(0, x_{-k}, q_k)] \\
&= \sup_{\rho_k e_k - q_k \geq 0 \atop m_k} \left\{ - \sup_{g(x_k, x_{-k}) \leq 0 \atop l} [q_k^T h_k(x_k, x_{-k}) - \theta_k(x_k, x_{-k}) \right. \\
&\quad \left. - \rho_k e_k^T h_k(x_k, x_{-k})] \right\} \\
&= \sup_{\rho_k e_k - q_k \geq 0 \atop m_k} \inf_{g(x_k, x_{-k}) \leq 0 \atop l} [\theta_k(x_k, x_{-k}) + (\rho_k e_k - q_k)^T h_k(x_k, x_{-k})].
\end{aligned}$$

Remark 1. Since the perturbation in the objective function is linear, it turns out to be the Lagrange duality with penalty parameters.

Now we formulate the sufficient condition for the primal-dual pair $P_k(x_{-k})$ and $D_k(x_{-k})$ as follows (cf. [2]):

Proposition 2. Let $x_{-k} \in \mathbb{R}^{n-k}$, $k = \overline{1, N}$ be fixed. If $\bar{x}_k \in C_k(\bar{x}_{-k}) := \{x_k \in \mathbb{R}^{n_k} \mid g(x_k, \bar{x}_{-k}) \leq 0\}$, $(\bar{\rho}_k, \bar{q}_k) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{m_k}$ such that $\bar{\rho}_k e_k - \bar{q}_k \geq 0$ and satisfy conditions

(i)

$$\begin{aligned}
&\theta_k(\bar{x}_k, \bar{x}_{-k}) + (\bar{\rho}_k e_k - \bar{q}_k)^T h_k(\bar{x}_k, \bar{x}_{-k}) \\
&= \inf_{x_k \in C_k(\bar{x}_{-k})} [\theta_k(x_k, \bar{x}_{-k}) + (\bar{\rho}_k e_k - \bar{q}_k)^T h_k(x_k, \bar{x}_{-k})];
\end{aligned}$$

(ii) $(\bar{\rho}_k e_k - \bar{q}_k)^T h_k(\bar{x}_k, \bar{x}_{-k}) = 0$,
then \bar{x}_k is an optimal solution to $P_k(x_{-k})$, \bar{q}_k is an optimal solution to $D_k(x_{-k})$, respectively.

Proof. Let $\bar{x}_{-k} \in \mathbb{R}^{n-k}$ be fixed. By (i) and (ii), we obtain that

$$\begin{aligned}
v(D_k(\bar{x}_{-k})) &\geq \inf_{x_k \in C_k(\bar{x}_{-k})} [\theta_k(x_k, \bar{x}_{-k}) + (\bar{\rho}_k e_k - \bar{q}_k)^T h_k(x_k, \bar{x}_{-k})] \\
&= \theta_k(\bar{x}_k, \bar{x}_{-k}) \geq v(P_k(\bar{x}_{-k}))
\end{aligned}$$

and taking into account the weak duality, the strong duality is fulfilled which leads to the expected conclusion. \square

Remark that the condition (i) in Proposition 2 can be rewritten as

$$\begin{aligned}
&\theta_k(\bar{x}_k, \bar{x}_{-k}) + (\bar{\rho}_k e_k - \bar{q}_k)^T h_k(\bar{x}_k, \bar{x}_{-k}) + \delta_{C_k(\bar{x}_{-k})}(\bar{x}_k) \\
&= \inf_{x_k \in \mathbb{R}^{n_k}} [\theta_k(x_k, \bar{x}_{-k}) + (\bar{\rho}_k e_k - \bar{q}_k)^T h_k(x_k, \bar{x}_{-k}) + \delta_{C_k(\bar{x}_{-k})}(x_k)],
\end{aligned}$$

where the indicator function of a set $D \subseteq \mathbb{R}^s$ is defined by

$$\delta_D : \mathbb{R}^s \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, \delta_D(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in X \\ +\infty, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let the functions $\theta_k, h_k, k \in \{1, \dots, N\}$ be differentiable. Then for each $k \in \{1, \dots, N\}$ the above condition becomes equivalently

$$\begin{aligned} 0 &\in \partial(\theta_k(\bar{x}_k, \bar{x}_{-k}) + (\bar{\rho}_k e_k - \bar{q}_k)^T h_k(\bar{x}_k, \bar{x}_{-k}) + \delta_{C_k(\bar{x}_{-k})}(\bar{x}_k)) \\ &= \nabla \theta_k(\bar{x}_k, \bar{x}_{-k}) + (\bar{\rho}_k e_k - \bar{q}_k)^T \cdot \nabla h_k(\bar{x}_k, \bar{x}_{-k}) + N_{C_k(\bar{x}_{-k})}(\bar{x}_k), \end{aligned}$$

where the subdifferential of a function $h : \mathbb{R}^s \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ at $x \in \mathbb{R}^s$ is the set

$$\partial h(x) = \left\{ p \in \mathbb{R}^s \mid f(y) - f(x) \geq p^T(y - x), \forall y \in \mathbb{R}^s \right\}$$

and $N_D = \partial \delta_D$ which is called a normal cone of a given set $D \subseteq \mathbb{R}^s$.

On the other hand, the above inclusion reduces into the following variational inequality problem for $k \in \{1, \dots, N\}$:

$$(VI_{\rho,q}^k) \langle \nabla \theta_k(\bar{x}_k, \bar{x}_{-k}) + (\bar{\rho}_k e_k - \bar{q}_k)^T \nabla h_k(\bar{x}_k, \bar{x}_{-k}), x_k - \bar{x}_k \rangle \geq 0, \forall x_k \in C_k(\bar{x}_{-k}).$$

Introducing the function $F_{\rho,q} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ by

$$F_{\rho,q}(x) := \left(\nabla \theta_k(\bar{x}_k, \bar{x}_{-k}) + (\bar{\rho}_k e_k - \bar{q}_k)^T \nabla h_k(\bar{x}_k, \bar{x}_{-k}) \right)_{k=1}^N,$$

we have the following parameterized variational inequality problem of finding $\bar{x} \in G$ such that

$$(VI_{\rho,q}) \quad \langle F_{\rho,q}(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0, \forall x \in G,$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ and $G := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x_k, x_{-k}) \leq 0\}$.

The following assertion deals with relationships between problems $(VI_{\rho,q}^k)$ and $(VI_{\rho,q})$.

Proposition 3. Let $\bar{\rho}_k \geq$ and $\bar{q}_k \in \mathbb{R}^{m_k}$, $k = \overline{1, N}$ be fixed. For each $k = \overline{1, N}$ and for a fixed $\bar{x}_{-k} \in \mathbb{R}^{n-k}$, \bar{x}_k is a solution to the problem $VI_{\bar{\rho}, \bar{q}}^k$ if and only if $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$ is a solution to $VI_{\bar{\rho}, \bar{q}}$.

Proof. If for each $k = \overline{1, N}$ and for a fixed $\bar{x}_{-k} \in \mathbb{R}^{n-k}$, \bar{x}_k is a solution to the problem $VI_{\bar{\rho}, \bar{q}}^k$, then summing all variational inequalities, it holds

$$\sum_{k=1}^N \langle \nabla \theta_k(\bar{x}_k, \bar{x}_{-k}) + (\bar{\rho}_k e_k - \bar{q}_k)^T \nabla h_k(\bar{x}_k, \bar{x}_{-k}), x_k - \bar{x}_k \rangle \geq 0,$$

$$\forall x = (x_1, \dots, x_N) \in \prod_{k=1}^N C_k(\bar{x}_{-k}) = G.$$

In other words, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$ is a solution of $VI_{\bar{\rho}, \bar{q}}$.

Conversely, let \bar{x} be a solution of $VI_{\bar{\rho}, \bar{q}}$. Assume that $\exists j \in \{1, \dots, N\}$ and $\tilde{x}_j \in \mathbb{R}^{n_j}$ such that

$$\langle \nabla \theta_j(\bar{x}_j, \bar{x}_{-j}) + (\bar{\rho}_j e_k - \bar{q}_j)^T \nabla h_j(\bar{x}_j, \bar{x}_{-j}), \tilde{x}_j - \bar{x}_j \rangle < 0.$$

Setting $\tilde{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{j-1}, \tilde{x}_j, \bar{x}_{j+1}, \dots, \bar{x}_N)$ in $VI_{\bar{\rho}, \bar{q}}$, it holds

$$\langle \nabla \theta_j(\bar{x}_j, \bar{x}_{-j}) + (\bar{\rho}_j e_k - \bar{q}_j)^T \nabla h_j(\bar{x}_j, \bar{x}_{-j}), \tilde{x}_j - \bar{x}_j \rangle \geq 0,$$

which leads to a contradiction. Therefore for each $k \in \{1, \dots, N\}$, \bar{x}_k is a solution of $VI_{\bar{\rho}, \bar{q}}^k$. \square

Theorem 1. Let $\bar{q} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_N) \in \mathbb{R}^m$ be fixed, and choose $\bar{\rho} = (\bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_N)$ such that $\bar{\rho}_k \geq \max_{j=1, m_k} \bar{q}_{kj}$. If $\bar{x} = (\bar{x}_k, \bar{x}_{-k}) \in \mathbb{R}^n$ is a solution to the problem $(VI_{\bar{\rho}, \bar{q}})$ and for each $k = \overline{1, N}$, the conditions

$$h_k(x_k, x_{-k}) \leq q_{m_k} 0, \text{ and } (\bar{\rho}_k e_k - \bar{q}_k)^T \cdot h_k(\bar{x}_k, \bar{x}_{-k}) = 0, \quad (3.1)$$

are fulfilled, then \bar{x} is a generalized Nash equilibrium point, i.e., for each $k = \overline{1, N}$, \bar{x}_k solves the problem $P_k(\bar{x}_{-k})$.

Proof. According to the choice of $\bar{\rho}_k$, and by assumptions for each $k = \overline{1, N}$, \bar{x}_k and \bar{q}_k are feasible to problems $P_k(\bar{x}_{-k})$ and $D_k(\bar{x}_{-k})$, respectively. On the other hand, since $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ is a solution to the problem $(VI_{\bar{\rho}, \bar{q}})$, the conditions (i) – (ii) are fulfilled, and this means that by Proposition 2, for each $k = \overline{1, N}$, \bar{x}_k solves the problem $P_k(\bar{x}_{-k})$. \square

Based on the above theorem, let us summarize how to find a solution of GNEP with coupling and shared constraints.

Let $\bar{q} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_N) \in \mathbb{R}^m$ be a fixed parameter.

- 1) Choose $\bar{\rho} = (\bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_N)$ such that $\bar{\rho}_k \geq \max_{j=1, m_k} \bar{q}_{kj}$.
- 2) Solve the variational inequality problem $(VI_{\bar{\rho}, \bar{q}})$ and let \bar{x} be the solution of $(VI_{\bar{\rho}, \bar{q}})$.
- 3) If the conditions (3.1) are fulfilled, then \bar{x} is GNE point, otherwise, choose parameter \bar{q} and Goto 1.

Remark 2. If we choose $\bar{\rho} = (\bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_N)$ such that $\bar{\rho}_k = \max_{j=1, m_k} \bar{q}_{kj}$, then it is obvious that the second condition in (3.1) is fulfilled.

4. Numerical Results

In order to solve the variational inequality ($VI_{\bar{\rho}, \bar{q}}$), we use the hyperplane projection method and numerical results were tested by using Matlab tools on a Toshiba L305D 2.0Ghz processor with 3.0 GB RAM.

Example 1.([7]) We consider the following two players game, where the first player controls the variable $x \in \mathbb{R}$ and the second $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & \min_x (x^2 - 2xy) \\ & \quad 0 \leq x \leq 1 \\ & \quad x + y - \frac{3}{2} \leq 0 \\ & \min_y \left(\frac{1}{2}y^2 + (x-1)y \right) \\ & \quad 0 \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

We penalize the coupled constraint only for the first player.

$$\begin{aligned} & \min_x \left(x^2 - 2xy + \rho_1(x + y - \frac{3}{2})_+ \right) \\ & \quad 0 \leq x \leq 1 \\ & \min_y \left(\frac{1}{2}y^2 + (x-1)y \right) \\ & \quad 0 \leq y \leq 1, \end{aligned}$$

where h_+ is an exact penalty function. Applying results in Section 3, we obtain the following parameterized VIP.

$$\langle F_{\rho,q}(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in G,$$

where

$$\begin{aligned} F_{\rho,q}(x, y) &= \begin{pmatrix} 2x - 2y + \rho_1 - q_1 \\ y + x - 1 \end{pmatrix} \\ G &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}. \end{aligned}$$

We choose a penalty parameter as $\rho_1 \geq q_1$, where q_1 is uniformly distributed in $(0, 1]$ and the starting point is $(x^0, y^0) = (1, 3)^T$.

n	time(sec)	iter	ρ_1/q_1	GNE
1	0.5313	36	0/0	(0.50003, 0.500039)
2	0.5	35	1.09283/0.606843	(0.378536, 0.621536)
3	0.4844	34	1.6534/0.891299	(0.309508, 0.690575)
4	0.4844	35	0.474971/0.456468	(0.49541, 0.504682)
5	0.5000	35	1.26611/0.821407	(0.388856, 0.611217)
6	0.5313	34	1.40737/0.615432	(0.302048, 0.698035)
7	0.5313	34	1.66002/0.921813	(0.315481, 0.684603)
8	0.5156	34	0.581972/0.176266	(0.398608, 0.601471)
9	0.5156	34	1.85237/0.93547	(0.270805, 0.729275)
10	0.5625	33	1.30392/0.41027	(0.276619, 0.723462)

Table 1: Some GNE points by Parameterized VIP.

Example 2. (see [5]) Now we consider the internet switching model. There are N players, each player having a single variable $x_k \in \mathbb{R}$. The utility functions are given by

$$\theta_k(x) = \frac{-x_k}{x_1 + \dots + x_N} \left(1 - \frac{x_1 + \dots + x_N}{B}\right), \quad k = 1, \dots, N$$

for some constant B . The constraints are

$$x_1 + \dots + x_N \leq B, \quad x_k \geq l_k$$

for some lower bounds $l_k \geq 0$. We also take the lower bounds $l_k = 0.01$, $k = 1, \dots, N$ and $N = 10$, $B = 1$. We know that in this case the problem has a solution $\bar{x} = \left(\frac{9}{100}, \dots, \frac{9}{100}\right)^T$. For each player, we penalize the constraints $h_k(x) = -x^k + 0.01 \leq 0$ and have the parameterized VIP with

$$\begin{aligned} F_{\rho q}(x) &= (\nabla_{x_k} \theta_k(x) - (\rho_k - q_k))_{k=1}^{10}, \\ G &= \{x \mid x_1 + \dots + x_{10} \leq 1\}, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \nabla_{x_k} \theta_k(x) &= 1 - \frac{1}{x_1 + \dots + x_{10}} + \frac{x_k}{(x_1 + \dots + x_{10})^2}, \\ \rho &= (\rho_1, \dots, \rho_{10}), \quad q = (q_1, \dots, q_{10}), \quad \rho_k > q_k \end{aligned}$$

and q_k , $k = 1, \dots, 10$ are uniformly distributed in $(0, 1]$. We choose the starting point as $x^0 = (0, \dots, 0)^T$.

n	time(sec)	iter	ρ/q	GNE
1	0.3750	9	$\rho = (0, \dots, 0)^T, q = (0, \dots, 0)^T$	$\begin{pmatrix} 0.0899953 \\ 0.0899953 \\ 0.0899953 \\ 0.0899953 \\ 0.0899953 \\ 0.0899953 \\ 0.0899953 \\ 0.0899953 \\ 0.0899953 \\ 0.0899953 \end{pmatrix}$
2	0.4844	14	$\rho = \begin{pmatrix} 1.21352 \\ 0.878855 \\ 0.542837 \\ 0.458195 \\ 0.982805 \\ 0.634084 \\ 1.65256 \\ 1.6656 \\ 0.711841 \\ 1.06865 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 0.561196 \\ 0.77268 \\ 0.00107337 \\ 0.00685779 \\ 0.195662 \\ 0.618563 \\ 0.890854 \\ 0.907035 \\ 0.38073 \\ 0.504078 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.134652 \\ 0.01 \\ 0.0241183 \\ 0.01 \\ 0.269438 \\ 0.01 \\ 0.244004 \\ 0.24087 \\ 0.01 \\ 0.0469175 \end{pmatrix}$

Table 2: Some GNE points by Parameterized VIP.

5. Conclusion

In this paper, we have examined a generalized Nash equilibrium problem with coupling and shared constraints. Based on the exact penalty and conjugate duality techniques, we reduced this problem to a parameterized variational inequality problem which allows to find many GNEs. Numerical results are given.

References

- Altangerel L., Battur G. Perturbation approach to generalized Nash equilibrium problems with shared constraints. *Optimization Letters*, 2012, vol. 6, pp. 1379-1391. <https://doi.org/10.1007/s11590-012-0510-8>

2. Boț R.I. Duality and optimality in multiobjective optimization. *Faculty of Mathematics, Ph.D. Dissertation, Chemnitz University of Technology*, 2003.
3. Boț R.I., Wanka G. The conjugate of the pointwise maximum of two convex functions revisited. *Journal of Global Optimization*, 2008, vol. 41, no. 4, pp. 625-632. <https://doi.org/10.1007/s10898-008-9282-1>
4. Facchinei F., Kanzow C. Generalized Nash equilibrium problems. *Annals of Operations Research*, 2010, vol. 175, no. 1, pp. 177-211. <https://doi.org/10.1007/s10479-009-0653-x>
5. Facchinei F., Kanzow C. Penalty methods for the solution of generalized Nash equilibrium problems. *SIAM Journal on Optimization*, 2010, no. 5, pp. 2228-2253. <https://doi.org/10.1137/090749499>
6. Facchinei F., Pang J.-S. Exact penalty functions for generalized Nash problems. *Di Pillo, G., Roma, M.(eds.) Large scale nonlinear optimization*, pp. 115-126. New York, Springer, 2006. https://doi.org/10.1007/0-387-30065-1_8
7. Facchinei F., Lampariello L. Partial penalization for the solution of generalized Nash equilibrium problems. *Journal of Global Optimization*, 2011, vol. 50, pp. 39-57.
8. Facchinei F., Pang J.-S. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*. New York, Springer Publ., 2003.
9. Fukushima M. Restricted generalized Nash equilibria and controlled penalty algorithm. *Technical Report 2008-007, Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University*, July 2008.
10. Fukushima M., Pang J.-S. Quasi-variational inequalities, generalized Nash equilibria, and multi-leader-follower games. *Comput. Manag. Sci.*, 2005, vol. 2, pp. 21-56.
11. Kubota K., Fukushima M. Gap Function Approach to the Generalized Nash Equilibrium Problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2010, vol. 144, no. 3, pp. 511-531.
12. Harker P.T. Generalized Nash games and quasi-variational inequalities. *Eur. J. Oper. Res.*, 1991, vol. 54, pp. 81-94. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(91\)90325-P](https://doi.org/10.1016/0377-2217(91)90325-P)
13. von Heusinger A., Kanzow C. Relaxation methods for generalized Nash equilibrium problems with inexact line search. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2009, vol. 143, no. 1, pp. 159-183. <https://doi.org/10.1007/s10957-009-9553-0>
14. Nabetani K., Tseng P., Fukushima M. Parametrized variational inequality approaches to generalized Nash equilibrium problems with shared constraints. *Computational Optimization and Applications*, 2011, vol. 48, pp. 423-452. <https://doi.org/10.1007/s10589-009-9256-3>
15. Wei J.-Y., Smeers Y. Spatial oligopolistic electricity models with Cournot generators and regulated transmission prices. *Oper. Res.*, 1999, vol. 47, pp. 102-112. <https://doi.org/10.1287/opre.47.1.102>

Lkhamsuren Altangerel, Professor, Faculty of Mathematics, Computer and Natural Sciences, German-Mongolian Institute for Resources and Technology, Nalaikh, Mongolia, tel.976-99031692,
e-mail: altangerel@gmit.edu.mn,
ORCID iD <https://orcid.org/0000-0001-5521-2439>

Gompil Battur, Associate Professor, Center of Mathematics for Applications and Department of Applied Mathematics, National University of Mongolia, Ulaanbaatar, Mongolia, tel.976-91017812,

e-mail: battur@seas.num.edu.mn,
 ORCID iD <https://orcid.org/0000-0002-0618-1071>

Received 09.11.2019

Точные штрафы и сопряженная двойственность для обобщенных задач равновесия Нэша со связанными и общими ограничениями

Л. Алтангерел¹, Г. Баттур²

¹Немецко-монгольский институт ресурсов и технологий, Налайх, Монголия

²Монгольский национальный университет, Улан-Батор, Монголия

Аннотация. Обобщенные задачи равновесия Нэша (GNEP) используются в теории игр, операционных исследованиях, технике, экономике, а также телекоммуникациях в последние два десятилетия. Одним из наиболее важных классов задач GNEP является класс задач с совместно выпуклыми или общими ограничениями, который широко изучается. Эти задачи считаются одними из самых сложных задач в этой области. Кроме того, достаточно мало исследований GNEP с сопряженными и общими ограничениями. Целью данной статьи является исследование взаимосвязи между использованием метода точных штрафов и сопряженной двойственностью в задаче выпуклой оптимизации для GNEP со связанными и общими ограничениями. Авторы статьи с помощью необходимых условий оптимальности получили параметризованные задачи вариационного неравенства. Рассмотренные задачи помогают исследовать многие другие обобщенные задачи равновесия Нэша. В статье также представлены некоторые численные результаты.

Ключевые слова: обобщенные задачи равновесия Нэша, точная функция штрафа, сопряженная двойственность, связанные и общие ограничения.

Лхамсүрэн Алтангерел, профессор, Немецко-монгольский институт ресурсов и технологий, Монголия, Налайх, тел.: 976-99031692, e-mail: altangerel@gmit.edu.mn, ORCID iD <https://orcid.org/0000-0001-5521-2439>

Гомпил Баттур, доцент, Монгольский национальный университет, Монголия, Улан-Батор, тел.: 976-91017812, e-mail: battur@seas.num.edu.mn, ORCID iD <https://orcid.org/0000-0002-0618-1071>

Поступила в редакцию 09.11.2019

ON CHARACTERIZATIONS OF WEAK SHARP MINIMA IN OPTIMIZATION PROBLEMS WITH APPLICATIONS TO VARIATIONAL INEQUALITIES

L. Altangerel

ABSTRACT

This paper aims to study characterizations based on conjugate functions for weak sharp minima in convex optimization problems. Additionally, applications to variational inequalities are presented.

1. INTRODUCTION

In association with the convergence analysis of algorithms in optimization Cromme [8], and Polyak [14] first introduced the notion of sharp or strongly unique local minima in the late 1970's. A function $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ is said to have a sharp minimum at $\bar{x} \in S$ if there exists an $\alpha > 0$ such that

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \alpha \|x - \bar{x}\|, \quad \forall x \in S,$$

where $\|\cdot\|$ is a norm in \mathbb{R}^n .

In the case where the solution set is not necessarily a singleton, the notion of a strongly unique solution to optimization problems was extended by Burke and Ferris [4] in finite-dimensional Euclidean spaces.

S is called a set of weak sharp minima for the function f relative to the set $S \subseteq \mathbb{R}^n$ where $\bar{S} \subseteq S$ if there exists $\alpha > 0$ such that

$$f(x) \geq f(y) + \alpha d_{\bar{S}}(x), \quad \forall x \in S \text{ and } y \in S,$$

where $d_{\bar{S}}(x) = \inf_{z \in \bar{S}} \|x - z\|$. It is clear that \bar{S} is a set of global minima for f over S . Let us also mention that the notion of weak sharp minima specifies first-order growth of the objective function away from the set of optimal solutions and has been used to unify a number of important concepts in mathematical programming such as subdifferential, generalized and contingent directional derivative, tangent, and normal cone and so on. Moreover, many optimization algorithms, such as proximal point algorithm exhibit finite termination at weak sharp minima. For the recent development in this direction, we refer to [5–7, 18, 19].

Different characterizations and their relationships for weak sharp minima in optimization problems have been investigated by using directional derivatives, tangent cones, and subdifferentials. To the best of our knowledge, Zălinescu ([17]) used first conjugate functions in order to give necessary and sufficient conditions for weak sharp minima.

This approach is based on well known the Fenchel-Moreau theorem and recently applied to the investigation of error bounds of convex inequality systems ([3]) and weak sharp minima in optimization problems ([20]).

This work deals with the investigation of characterizations using conjugate functions for weak sharp minima in convex optimization with applications to variational inequalities.

The paper is structured as follows. Section 2 provides some preliminary results and definitions. In section 3, we consider about weak sharp minima in optimization problems. Section 4 presents characterizations of weak sharp minima via dual and primal gap functions in variational inequalities.

2. PRELIMINARIES

For a nonempty subset $S \subseteq \mathbb{R}^n$, we denote the closure and interior of S by $\text{cl}(S)$ and $\text{int}(S)$, respectively.

The indicator function of a given set S is defined by $\delta_S(x) = 0$, for $x \in S$ and $\delta_S(x) = +\infty$, for $x \notin S$ and the conjugate function of a function $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{B} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ is defined by $h^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{B}$, $h^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [p^T x - h(x)]$, $p \in \mathbb{R}^n$. For $x \in \mathbb{R}^n$, by $d_A(x)$ we denote the distance from x to A , i.e., $d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.

The tangent and normal cones to a nonempty closed convex set S at $x \in S$ are defined by

$$T_S(x) = \text{cl} \left[\bigcup_{t > 0} t(S - x) \right]$$

and $N_S(x) = (T_S(x))^\circ$, where S° denotes the polar set of $S \subseteq \mathbb{R}^n$, that is

$$N_S(x) = \begin{cases} \{p \in \mathbb{R}^n \mid p^T(y - x) \leq 0, \forall y \in S\}; & \text{if } x \in S, \\ \emptyset, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The subdifferential of f at x and the directional derivative of f at x in the direction d are denoted by $\partial f(x)$ and $f'(x; d)$ respectively.

The effective domain and the epigraph of a function h are $\text{dom } h := \{x \in X \mid h(x) < \infty\}$ and $\text{epi } h := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} \mid h(x) \leq r\}$.

- A function $h : X \rightarrow \mathbb{B}$ is called proper if $h(x) > -\infty$, $\forall x \in X$ and $\text{dom } h \neq \emptyset$.
- A function $h : X \rightarrow \mathbb{B}$ is called lower semi-continuous if $\text{epi } h$ is closed.
- The infimal convolution of the functions $h_i : X \rightarrow \mathbb{B}$, $i = 1, \dots, m$, is the function $h_1 \square \cdots \square h_m : X \rightarrow \mathbb{B}$ defined by

$$h_1 \square \cdots \square h_m(x) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^m h_i(x^i) \mid x^i \in X, \sum_{i=1}^m x^i = x \right\}.$$

Let us recall some well-known results from convex analysis.

PROPOSITION 1 Fenchel-Moreau. *Let $h : X \rightarrow \mathbb{B}$ be a proper function. Then $h = h^{**}$ if and only if h convex and lower semi-continuous, where h^{**} is a biconjugate of h .*

PROPOSITION 2. Let $h_i : X \rightarrow \mathbb{B}$, $i = 1, \dots, m$, be proper, convex and lower semi-continuous functions such that $\bigcap_{i=1}^m \text{dom } h_i \neq \emptyset$. Then it holds

$$\left(\sum_{i=1}^m h_i \right)^* = \overline{h_1^* \square \cdots \square h_m^*},$$

where \bar{h} is the lower semicontinuous hull of a given function $h : X \rightarrow \mathbb{B}$, i.e., the greatest lower semicontinuous function less than or equal to h .

3. WEAK SHARP MINIMA IN OPTIMIZATION PROBLEMS

Assume that $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{B}$ is a proper, lower semi-continuous, convex function and $G \subset X$ is a nonempty closed convex set. Let $G \cap \text{dom}(f) \neq \emptyset$. We consider the following optimization problem

$$(P) \quad \inf_{x \in G} f(x).$$

Let us denote the solution set of problem (P) by S_P .

DEFINITION 1. The set S_P is said to be a set of weak sharp minima with modulus $\alpha > 0$ if

$$f(y) + \alpha d_{S_P}(x) \leq f(x) \quad \forall x \in G \text{ and } y \in S_P. \quad (3.1)$$

REMARK 1. Let f be differentiable. Then S_P is set of weak sharp minima if and only if

$$-\nabla f(x) \in \text{int} \bigcap_{y \in S_P} \left[T_G(y) \cap N_{S_P}(y) \right]^\circ, \quad \forall x \in S_P.$$

LEMMA 1. Let $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{B}$ be a proper, lower semi-continuous, convex function and G be a nonempty, closed convex set. Then, it holds

$$\overline{f^* \square \sigma_G}(p) + \bar{f} \geq \sigma_{S_P}(p), \quad \forall p \in \mathbb{R}^n,$$

where σ_S is the support function of $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

Proof: By Young's inequality, we have

$$(f + \delta_G)^*(p) + f(x) \geq p^T x, \quad \forall p \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in S_p,$$

or, equivalently

$$\overline{f^* \square \sigma_G}(p) + f(x) \geq p^T x, \quad \forall p \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in S_p.$$

Taking the supremum in both sides overall $x \in S_p$, one gets the desired result. \square

THEOREM 1. Let $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{B}$ be a proper, lower semi-continuous, convex function and G be a nonempty, closed convex set. Then, the following statements are equivalent.

- (i) S_p is a set of weak sharp minima.

(ii) $\exists \alpha > 0$ such that

$$\overline{f^* \square \sigma_G}(p) + \bar{f} = \sigma_{S_P}(p), \quad \forall p \in \alpha \mathbb{B}^0,$$

where by \mathbb{B}^0 denotes an unit ball in \mathbb{R}^n and $\bar{f} = \inf_{x \in G} f(x)$.

Proof: Remark that under assumptions of the theorem, the solution set S_p is closed and convex (cf. [9]). (3.1) can be equivalently written as

$$\bar{f} + \alpha d_{S_P}(x) \leq f(x) + \delta_G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.2)$$

Since the functions $\bar{f} + \alpha d_{S_P}$ and $f + \delta_G$ are lower-semicontinuous and convex, according to the Fenchel-Moreau theorem (3.2) is fulfilled if and only if (see [2] and cf. [20])

$$\begin{aligned} (\bar{f} + \alpha d_{S_P})^*(p) &\geq (f + \delta_G)^*(p), \quad \forall p \in \mathbb{R}^n \\ \Leftrightarrow \alpha(\|\cdot\| \square \delta_{S_P})^* - \bar{f} &\geq \overline{f^* \square \sigma_G}(p), \quad \forall p \in \mathbb{R}^n \\ \Leftrightarrow \alpha(\delta_{\mathbb{B}^0} + \sigma_{S_P})(\frac{p}{\alpha}) - \bar{f} &\geq \overline{f^* \square \sigma_G}(p), \quad \forall p \in \mathbb{R}^n \\ \Leftrightarrow \sigma_{S_P}(p) &\geq \bar{f} + \overline{f^* \square \sigma_G}(p), \quad \forall p \in \alpha \mathbb{B}^0. \end{aligned}$$

On the other hand, by using Lemma 1, we obtain equality. \square

4. APPLICATIONS TO VARIATIONAL INEQUALITIES

Let $K \subseteq \mathbb{R}^n$ be a nonempty closed convex subset. For given a mapping $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ we consider the following variational inequality problem that consists in finding $x \in K$ such that

$$(VI) \quad F(x)^T(x - y) \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

We denote by S_{VI} the solution set of (VI).

DEFINITION 2.

(i) A mapping $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is said to be monotone on K if

$$(F(x) - F(y))^T(y - x) \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) A mapping $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ is said to be pseudomonotone on K if for any $x, y \in K$

$$F(x)^T(y - x) \geq 0 \Rightarrow F(y)^T(y - x) \geq 0.$$

The so-called Minty variational inequality problem is closely related to (VI) that consists in finding a vector $x \in K$ such that

$$(MVI) \quad F(y)^T(x - y) \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

Under assumptions that F is continuous and pseudomonotone on K , the solution sets of (VI) and (MVI) coincide and in this case the set S_{VI} can be represented as the intersection of half-spaces, and it is closed and convex (cf. [10], [12], [15]).

In association with [12] and [13] the notion of weak sharpness was extended to the solution set of the problem (VI). Moreover, the weak sharpness of the solution set of (VI) has been investigated in Hilbert [15] and Banach spaces [10], respectively. The

solution set S_{VI} of the problem (VI) is said to be weakly sharp if ([13], cf. also Remark 1)

$$-F(x) \in \text{int} \bigcap_{y \in S_{VI}} \left[T_K(y) \cap N_{S_{VI}}(y) \right]^\circ, \quad \forall x \in S_{VI}.$$

Before we consider the characterization of weak sharp minima in variational inequalities, let us first mention the definition of a gap function for variational inequalities.

DEFINITION 3. A function $\gamma : K \rightarrow \mathbb{B}$ is said to be a gap function for (VI) if

- (i) $\gamma(x) \geq 0, \forall x \in K;$
- (ii) $\gamma(\bar{x}) = 0$ if and only if $\bar{x} \in S_{VI}.$

4.1. Characterization by dual gap function

The so-called dual gap function of the problem (VI) is defined by (see [10], [12])

$$\gamma_d^{VI}(x) := \sup_{y \in K} F(y)^T(x - y), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

which is lower semi-continuous, proper convex.

DEFINITION 4.

- (i) A function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{B}$ is said to be Gâteaux differentiable at x if $\exists f'(x; d), \forall d \in \mathbb{R}^n$ and it holds

$$f'(x; d) = \nabla f(x)^T d, \quad \forall d \in \mathbb{R}^n.$$

- (ii) f is said to be Lipschitz continuous on S if there exists a constant $K > 0$ such that

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|, \quad \forall x, y \in S.$$

- (iii) f is said to be locally Lipschitz continuous on S if for each $x_0 \in S$ there exists a neighbourhood U of x_0 such that f restricted to U is Lipschitz continuous.

PROPOSITION 3. (cf. [10]) Assume that F is pseudomonotone, continuous and γ_d^{VI} is Gâteaux differentiable and Lipschitz continuous on S_{VI} . Then S_{VI} is weakly sharp if and only if $\exists \alpha > 0$ such that

$$\gamma_d^{VI}(x) \geq \alpha d_{S_{VI}}(x), \quad \forall x \in K.$$

THEOREM 2. Let $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ be pseudomonotone, continuous and $K \subseteq \mathbb{R}^n$ be a nonempty closed convex set. Then $\exists \alpha > 0$ such that

$$\gamma_d^{VI}(x) \geq \alpha d_{S_{VI}}(x), \quad \forall x \in K \tag{4.1}$$

if and only if

$$\overline{(\gamma_d^{VI})^* \square \sigma_K}(p) \leq \sigma_{S_{VI}}(p), \quad \forall p \in \alpha \mathbb{B}^0.$$

Proof: By using the indicator function, (4.1) can be rewritten as

$$\gamma_d^{VI}(x) + \delta_K(x) \geq \alpha d_{S_{VI}}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.2}$$

Because of the function $\gamma_d^{VI} + \delta_K$ is lower semi-continuous and convex, we can apply the Fenchel-Moreau theorem and (4.2) holds if and only if

$$(\gamma_d^{VI} + \delta_K)^*(p) \leq \alpha(\|\cdot\| \square \delta_{S_{VI}})^*(p), \quad \forall p \in \mathbb{R}^n.$$

Consequently, we obtain the desired assertion. \square

4.2. Characterization by primal gap function

The primal gap function of the problem (VI) defined by

$$\gamma^{VI}(x) := \sup_{y \in K} F(x)^T(x - y), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Let

$$\Lambda(x) := \{y \in K \mid F(x)^T(x - y) = \gamma^{VI}(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

PROPOSITION 4. (cf. [11]) Let $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ be monotone and constant on $\Lambda(x^*)$ for some $x^* \in S_{VI}$. Suppose that γ^{VI} is Gâteaux differentiable, locally Lipschitz on S_{VI} , and $\gamma^{VI}(x) < +\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Then S_{VI} is weakly sharp if and only if $\exists \alpha > 0$ such that

$$\gamma^{VI}(x) \geq \alpha \cdot d_{S_{VI}}(x), \quad \forall x \in K.$$

THEOREM 3. Let F be affine, monotone, continuous on \mathbb{R}^n and constant on $\Lambda(x^*)$ for some $x^* \in S_{VI}$. Suppose that γ^{VI} is Gâteaux differentiable, locally Lipschitz continuous on S_{VI} , and $\gamma^{VI}(x) < +\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Then $\exists \alpha > 0$ such that

$$\gamma^{VI}(x) \geq \alpha \cdot d_{S_{VI}}(x), \quad \forall x \in K$$

if and only if

$$\overline{(\gamma^{VI})^* \square \sigma_K}(p) \leq \sigma_{S_{VI}}(p), \quad \forall p \in \alpha \mathbb{B}^0.$$

Conclusions

This paper attempts to show characterizations dealing with weak sharp minima in convex optimization using conjugate functions. The same approach was applied to variational inequalities regarding gap functions. In the future, it would be interesting to investigate relationships between characterizations based on different concepts such as conjugate functions, directional derivatives, and tangent cones.

Acknowledgements

Part of this work was carried out while the author visited at Chemnitz University of Technology. He would like to express his gratitude Prof. G.Wanka and R.I.Boț for helpful suggestions and advice.

REFERENCES

- Altangerel, L.; Boț, R.I.; Wanka, G., *On the construction of gap functions for variational inequalities via conjugate duality*, Asia-Pacific Journal of Operational Research 24, No. 3, 353–371, 2007.

2. Bot, R. I.; Grad, S-M.; Wanka, G., *Duality in vector optimization*. Vector Optimization. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
3. Bot, R. I.; Csetnek, E.R., *Error bound results for inequality systems via conjugate duality*, Top 20, No. 2, 296–309, 2012.
4. J. V. Burke and M. C. Ferris, *Weak sharp minima in mathematical programming*, SIAM J. Control Optim., 31 (1993), pp. 1340–1359.
5. J. V. Burke and S. Deng, *Weak sharp minima revisited Part I: Basic theory*, Control Cybern., 31 (2002), pp. 439–469.
6. J. V. Burke and S. Deng, *Weak sharp minima revisited. II. Application to linear regularity and error bounds*, Mathematical Programming B, vol. 104 (2005), pp. 235–261.
7. J. V. Burke and S. Deng, *Weak sharp minima revisited. III. Error bounds for differentiable convex inclusions*, Mathematical Programming B, vol. 116 (2009), pp. 37–56.
8. L. Cromme, *Strong uniqueness, a far-reaching criterion for the convergence analysis of iterative procedures*, Numer. Math., 29 (1978), pp. 179–193.
9. Ekeland, I.; Temam, R., *Convex analysis and variational problems*, Classics in Applied Mathematics, SIAM, 1999.
10. Hu, Y.H.; Song, W., *Weak sharp solutions of variational inequalities in Banach spaces*, J. Math. Anal. App. 374 (2011). 118–132.
11. Liu, Y.N., Wu, Z.L., *Characterization of weakly sharp solutions of variational inequality by its primal gap function*, Optimization Letters 10, 563–576, 2016.
12. Marcotte, P.; Zhu, D.L., *Weak sharp solutions of variational inequalities*, SIAM J. Optim. 9 (1998) 179–189.
13. Patriksson, M., *A unified framework of descent algorithms for nonlinear programs and variational inequalities*, Ph.D. thesis, Department of Mathematics, Linköping Institute of Technology, Linköping, Sweden, 1993.
14. B. T. Polyak, *Sharp Minima*, Institute of Control Sciences Lecture Notes, USSR, Moscow, Russia, 1979, Presented at the IIASA Workshop on Generalized Lagrangians and Their Applications, IIASA, Laxenburg, Austria, 1979.
15. Wu, Z.L.; Wu, S.Y., *Weak sharp solutions of variational inequalities in Hilbert spaces*, SIAM J. Optim. 14 (2004) 1011–1027.
16. Wu, Z.L.; Wu, S.Y., *Gâteaux differentiability of the dual gap function of a variational inequality*, European Journal of Operations Research 190, 328–344, 2008.
17. Cornejo, O.; Jourani, A.; Zălinescu, C., *Conditioning and upper-Lipschitz inverse subdifferentials in nonsmooth optimization problems*. J. Optim. Theory Appl. 95 (1997), no. 1, 127–148.
18. M. Studniarski ; D. E. Ward, *Weak sharp minima: characterizations and sufficient conditions*, SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 38, no. 1 (1999), pp. 219–236.
19. C. Zalinescu, *Weak sharp minima, well-behaving functions and global error bounds for convex inequalities in Banach spaces*, in Proceedings of the 12th Baikal International Conference on Optimization Methods and Their Application, Institute of System Dynamics and Control Theory of SB RAS, Irkutsk, Russia, 2001, pp. 272–284.
20. Zhou, J.; Wang, C., *New characterizations of weak sharp minima*, Optimization Letters 6, No. 8, 1773–1785, 2012.

L. Altangerel

German-Mongolian Institute for Resources and Technology

Ulaanbaatar, Mongolia

altangerel@gmit.edu.mn

Loan interest rate Nash models with solvency constraints in the banking sector

G. Battulga, L. Altangerel & G. Battur

To cite this article: G. Battulga, L. Altangerel & G. Battur (2021): Loan interest rate Nash models with solvency constraints in the banking sector, Optimization Methods and Software, DOI: [10.1080/10556788.2021.1891537](https://doi.org/10.1080/10556788.2021.1891537)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/10556788.2021.1891537>



Published online: 24 Feb 2021.



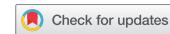
Submit your article to this journal



View related articles



View Crossmark data



Loan interest rate Nash models with solvency constraints in the banking sector

G. Battulga^a, L. Altangerel^b and G. Battur^a

^aDepartment of Applied Mathematics, National University of Mongolia, Ulaanbaatar, Mongolia; ^bFaculty of Mathematics, Computer and Natural Sciences, German-Mongolian Institute for Resources and Technology, Nalaikh, Mongolia

ABSTRACT

This paper attempts to study loan interest rate Nash game models in the banking sector under regulatory solvency constraints. By taking solvency constraints as Basel I, Basel II, and Expected Short-fall (ES), we obtain results regarding the existence of loan interest rate equilibrium. A sensitivity analysis for solvency models and some numerical results are presented. Numerical results show that the weighted loan interest rate of the Mongolian banking system is consistent with the base case of the theoretical weighted loan interest rate corresponding to the Nash equilibrium.

ARTICLE HISTORY

Received 6 September 2019
Accepted 11 February 2021

KEYWORDS

Nash equilibrium model;
Basel I; Basel II; and ES
solvency constraints; credit
rating; loan interest rate

1. Introduction

The competition among banks regarding interest rates depends on the loan demands of lenders. For lenders, if consumer loan demand is low, banks start to compete on loans as these are the banks' primary source of income. van Leuvenstein *et al.* [16] analysed the impact of loan market competition on the interest rates applied by European banks to loans and deposits using a novel measure called the Boone indicator. They found evidence that stronger competition is associated with significantly lower spreads between banks and market interest rates for most loan market products.

In the insurance industry, different game theory models have been investigated. Dutang *et al.* [7] first introduced a model with solvency constraints when studying the Nash and Stackelberg equilibrium. They also included a sensitivity analysis. Boonen *et al.* [5] introduced two different models for the rate of selling new policies, and they used continuous time-optimal control theory to obtain Nash equilibrium premiums. Recently, Battulga *et al.* [4] extended the one-period (cf. [7]) model to a multi-period one by using a transition probability matrix dependent on several economic factors. Under the assumption that the solvency constraints will be updated each period, they provided similar results regarding the existence of premium equilibrium and sensitivity analysis to those of [7].

By considering the impact of capital, some efforts have been devoted to the banking sector. For instance, Kim and Santomero [14] considered the mean-variance portfolio

problem with equity to asset ratio and investigated the impact of this variable. Keeley and Furlong [13] showed that the conditional expected capital return expressed in terms of the option value of deposit insurance. The sensitivity analysis of the option value depending on deposits and asset portfolio risk was investigated. Furfine [11] developed the bank's dynamic asset allocation model by considering factors such as assets, deposits, and some costs, including risk-based capital cost. By using the US real data, he showed that the regulatory standard is a significant impact on optimal asset allocation. Pantelous [18] also developed the bank's dynamic asset allocation model which includes risk-based capital cost, and by using linearization techniques, he investigated linear quadratic control problem.

In case of weak loan demand, if the bank wishes to expand its loan portfolio, then the bank may weaken its current credit requirements to accept more applicants. Thus loan interest rate will increase as the credit risk of the bank increases. On the other hand, in case of strong loan demand, if the bank wishes to shrink its loan portfolio, then the bank also may face costs (see [11]). Thus loan demand is one of the triggers of the loan interest rate.

The capital impact in the composition of the asset side of the bank balance sheet was studied in [11,14,18]. Moreover, it would be interesting to analyse the capital impact on loan interest rates of the banking industry. Drumond and Jorge [6] obtained the equilibrium loan interest rates which correspond to perfect and imperfect competition in the banking industry under Basel I and risk-based capital requirements. However, they did not take into account solvency constraints which guarantee bank still having solvency after its lending business.

Following the idea of Dutang *et al.* [7] and Battulga *et al.* [4], this paper deals with the loan interest rate Nash game models with solvency constraints. To the best of our knowledge, this is the first attempt to introduce a game theory model with solvency constraints in the banking sector. By taking solvency constraints as Basel I, Basel II, and ES, we obtained results regarding the existence of loan interest rate equilibrium and sensitivity analysis and include illustrations with numerical results.

The rest of the paper is structured as follows. Section 2 provides introduction to Nash equilibrium problems and variational inequalities. In Section 3, we investigate the Nash game models with solvency constraints and assertions related to the existence of loan interest rate equilibrium. A sensitivity analysis is also presented. Numerical results based on the data from three Mongolian banks are given in Section 4.

2. Nash equilibrium problems and variational inequalities

This section gives an overview of the Nash equilibrium model and its connection to the variational inequality [8,20]. Assume that there are N players, each controlling the variables $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$. We denote by x the overall vector for all variables $x := (x_1^T, x_2^T, \dots, x_N^T)^T$, and by x_{-i} the vector of all players' variables except that of player i : $x_{-i} := (x_1^T, \dots, x_{i-1}^T, x_{i+1}^T, \dots, x_N^T)^T$. Given other players' strategies x_{-i} , the player i aims to choose $x_i \in X_i$ that minimizes his payoff function $f_i(x_i, x_{-i})$, i.e.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } f_i(x_i, x_{-i}) \\ & \text{subject to } x_i \in X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}. \end{aligned}$$

A Nash equilibrium or simply a solution of the NEP, is point $x^* = (x_1^{*T}, x_2^{*T}, \dots, x_N^{*T})^T$, $x_i^* \in X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \dots, N$ such that

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \leq f_i(x_i, x_{-i}^*), \quad \forall x_i \in X_i. \quad (1)$$

Let us assume that the following conditions are true for each player i :

- (i) The strategy set X_i is closed and convex;
- (ii) The payoff function $f_i(x_i, x_{-i})$ is continuously differentiable and convex in x_i for every fixed x_{-i} .

Then, for each player, we have a convex optimization problem and the optimality condition for the solution becomes

$$\langle \nabla_{x_i} f_i(x^*), x_i - x_i^* \rangle \geq 0, \quad \forall x_i \subseteq X_i, \quad (2)$$

where $\nabla_z g(z)$ is a gradient vector of g with respect to variable z and $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ is a dot product of two n -dimensional vectors.

Introducing $F(x) := (\nabla_{x_1} f_1(x), \dots, \nabla_{x_N} f_N(x))$, the problem (1) can be reduced to the variational inequality problem that consists in finding $x^* \in \Omega := X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$ such that

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \Omega. \quad (3)$$

3. Nash models with solvency constraints

In this section, we introduce the loan interest rate Nash game models with solvency constraints. The similar models were investigated in the non-life insurance market [4,7]. Let us consider in detail how the model is constructed. We assume that in the market, N banks are competing on loan interest rates and that there are R credit ratings for loans. For the loan with credit rating i , let $p_i(\Psi)$ be its default probability, which is conditional on mixing random variable Ψ , and let Δ_i be the percentage loss given that default occurs. For $1 \leq i \leq R$, we assume that the percentage losses Δ_i have values in $(0, 1]$ and that $p_i(\cdot)$ is a strictly increasing function for its argument. For the n th bank, let $L_{i,n}$ be an amount of loan portfolio with a i th credit rating. Let $x_{i,n}$ be a loan interest rate of bank n corresponding to a i th credit rating. Then, taking into account the approach in [7] (see also [4]), the n th bank maximizes the net income before tax defined as

$$O_n(x) = \sum_{i=1}^R L_{i,n} \left(1 - \beta_{i,n}^L \left(\frac{x_{i,n}}{m(x_{i,n})} - 1 \right) \right) (x_{i,n} - \pi_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi)), \quad (4)$$

where for the n th bank with a i th credit rating, $\beta_{i,n}^L > 0$ is the loan interest rate elasticity parameter, $\pi_{i,n}$ is the break-even interest rate, e_n is the expense rate, $x = (x_1^T, \dots, x_N^T)^T$, $x_n = (x_{1,n}, \dots, x_{R,n})^T$, $n = 1, \dots, N$ and $m(z_{i,n}) = \frac{1}{N-1} \sum_{k \neq n} z_{i,k}$ is the market interest proxy, i.e. for the n th bank with a i th credit rating $m(z_{i,n})$ is the average of the loan interest rates of other banks with a i th credit rating.

The solvency constraint aims to require banks to hold a certain amount of capital in order to protect depositors against adverse economic conditions. Therefore, in addition to maximizing an objective function (1), banks must satisfy a solvency constraint imposed by the regulator. In this paper, we consider three different solvency constraints, namely, Basel I, Basel II, and ES constraints, and they are key features of our model.

For the n th bank, we assume that there are $m_{i,n}$ loans with credit rating i and for the k th lender, its corresponding default indicators are $Y_{i,k,n}$, and its exposures are $e_{i,k,n}$. Let $\mathbb{P}(Y_{i,k,n} = 1|\Psi) = p_i(\Psi)$, $k = 1, \dots, m_{i,n}$, $i = 1, \dots, R$ and $\sum_{k=1}^{m_{i,n}} e_{i,k,n} = L_{i,n}$. Then, for the n th bank, the random loss from the loan portfolio is given by

$$Q_n := \sum_{i=1}^R \sum_{k=1}^{m_{i,n}} e_{i,k,n} \Delta_i Y_{i,k,n},$$

and the expected loss conditional on mixing random variable Ψ becomes

$$\mathbb{E}[Q_n|\Psi] := \sum_{i=1}^R \sum_{k=1}^{m_{i,n}} e_{i,k,n} \Delta_i \mathbb{E}[Y_{i,k,n}|\Psi] = \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i p_i(\Psi).$$

- (i) According to Frey and McNeil [9] (see also [17]), if the loan portfolio size is sufficiently large the α -quantile of the loan loss random variable Q_n can be approximated by

$$q_\alpha(Q_n) \approx \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i p_i(q_\alpha(\Psi)),$$

where $q_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\}$ is the α -quantile of the X random variable. For the portfolio loss ratio, a similar result was given by Gordy in [12]. This is one of the most influential works in the area of capital charges in the Basel II proposal on credit risk. In this case, for the n th bank, the Basel II solvency constraint conditional on Ψ can be defined as

$$g_n^1(x_n) = K_n + \sum_{i=1}^R L_{i,n} (x_{i,n} - \pi_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi)) - \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i p_i(q_\alpha(\Psi)).$$

- (ii) Basel I was issued in 1988 and focused mainly on credit risk by creating a bank asset classification system. According to Basel I, banks are required to keep capital of at least 8% of their determined risk profile on hand. As claimed by FSI Survey [10], there are some countries in which no decision has been taken on the implementation of Basel II including Mongolia. That is the reason why we included Basel I to our investigation.

The Basel I solvency constraint conditional on Ψ can be defined as

$$g_n^2(x_n) = K_n + \sum_{i=1}^R L_{i,n}(x_{i,n} - \pi_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi)) - c \sum_{i=1}^R L_{i,n} w_i,$$

where c is a percentage of a risk-weighted asset, and w_i is the risk weight for a loan with credit rating i .

- (iii) Artzner *et al.* [3] first introduced a coherent risk measure in financial risk management. It is easy to show from the definition of the quantile of the random loss variable that VaR is translation invariant, positively homogeneous, and monotone. The sub-additivity property is not valid for VaR in general, and however, therefore VaR is not a coherent risk measure. Let us mention an example of the coherent risk measure, which is the expected shortfall (see [1]). For the random variable X with $E(|X|) < \infty$, the expected shortfall at the confidence level $\alpha \in (0, 1)$ is defined as

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \left\{ \mathbb{E}[XI_{\{X \geq q_\alpha(X)\}}] + q_\alpha(X)[1 - \alpha - \mathbb{P}(X \geq q_\alpha(X))] \right\},$$

where I_A is the indicator random variable of event A .

If we use the formula of the expected shortfall (see [1]):

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 q_u(X) du$$

to an approximation of a quantile of the loan loss portfolio, then the approximate formula for the n th bank's expected shortfall at confidence level $\alpha \in (0, 1)$ turns out to be

$$\text{ES}_\alpha(Q_n) \approx \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i \int_\alpha^1 p_i[q_u(\Psi)] du.$$

It is not difficult to show (see [1]) that

$$h_i(\alpha) := \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 p_i[q_u(\Psi)] du, \quad i = 1, \dots, R$$

are continuous increasing functions. Then, for the n th bank, the ES solvency constraint conditional on Ψ can be defined as

$$\begin{aligned} g_n^3(x_n) &= K_n + \sum_{i=1}^R L_{i,n}(x_{i,n} - \pi_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi)) \\ &\quad - \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i \int_\alpha^1 p_i[q_u(\Psi)] du. \end{aligned}$$

Therefore, the strategy set of the n th player, $n \in \{1, \dots, N\}$ in cases of Basel II, Basel I, and ES can be given as follows:

- **Basel II:**

$$\begin{aligned}
X_n^1 &:= \left\{ x_n \in \prod_{i=1}^R [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \mid g_n^1(x_n) \geq 0 \right\} \\
&= \left\{ x_n \in \prod_{i=1}^R [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \mid K_n + \sum_{i=1}^R L_{i,n}(x_{i,n} - \pi_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi)) \right. \\
&\quad \left. \geq \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i p_i(q_\alpha(\Psi)) \right\}, \tag{5}
\end{aligned}$$

- **Basel I:**

$$\begin{aligned}
X_n^2 &:= \left\{ x_n \in \prod_{i=1}^R [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \mid g_n^2(x_n) \geq 0 \right\} \\
&= \left\{ x_n \in \prod_{i=1}^R [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \mid K_n + \sum_{i=1}^R L_{i,n}(x_{i,n} - \pi_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi)) \right. \\
&\quad \left. \geq c \sum_{i=1}^R L_{i,n} w_i \right\}, \tag{6}
\end{aligned}$$

ES:

$$\begin{aligned}
X_n^3 &:= \left\{ x_n \in \prod_{i=1}^R [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \mid g_n^3(x_n) \geq 0 \right\} \\
&= \left\{ x_n \in \prod_{i=1}^R [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \mid K_n + \sum_{i=1}^R L_{i,n}(x_{i,n} - \pi_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi)) \right. \\
&\quad \left. \geq \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i \int_{\alpha}^1 p_i[q_u(\Psi)] du \right\}, \tag{7}
\end{aligned}$$

where for $i = 1, \dots, R$, \underline{x}_i , and \bar{x}_i represent minimum, and maximum loan interest rate of loan with i th credit rating. The minimum and maximum loan interest rates could be set by a regulators (some countries have loan interest rate ceiling). For equations (5)–(7), $\sum_{i=1}^R L_{i,n}(x_{i,n} - \pi_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi))$ expresses capital increment of n th bank, which guarantees that n th bank still has solvency after lending activity.

The loan interest rate Nash game models with solvency constraints consists in finding $x = (x_1^T, \dots, x_N^T)^T$ such that for the player n it holds:

$$\begin{aligned}
(\text{NEP}_i) \quad &\text{maximize } O_n(x) \\
&\text{subject to } x_n \in X_n^i, \quad i = 1, 2, 3, \quad x_n = (x_{1,n}, \dots, x_{R,n})^T.
\end{aligned}$$

Let us now give some results dealing with the existence of premium equilibrium and sensitivity analysis (cf. [7], see also [4]).

Proposition 3.1: *The bank game with N players whose objective functions are defined by (4) and solvency constraints are defined by (5), or (6), or (7) admits a unique Nash interest rate equilibrium.*

Proof: It is not difficult to realize that the objective function (4) is concave with respect x and constraints in (5)–(7) are linear functions which enables us to apply the Theorem 1 in [19] for the existence of a Nash equilibrium, and the similar way discussed in [7] and [4] can be used to verify its uniqueness. ■

The result is devoted to the sensitivity analysis for the model with solvency constraints for Basel II, and the similar assertions are true for other models.

Theorem 3.1: *Let x^* be the loan rates equilibrium of the Basel II bank game with N players. Moreover, let functions $p_i(\cdot)$ and $i = 1 \dots, R$ be continuous and strictly increasing, and the distribution function of the Ψ random variable be a strictly increasing function. Then:*

- (1) *For each player n , the corresponding loan rate equilibrium $x_{k,n}^* \in]\underline{x}_k, \bar{x}_k[$ depends on the parameters in the following way:*
 - (i) *it increases with break-even interest rate $\pi_{i,n}$, expense rate e_n , percentage losses Δ_i , mixing variable Ψ , and confidence level α and*
 - (ii) *it decreases with the sensitivity parameter $\beta_{i,n}^L$ and capital K_n .*
- (2) *If the solvency constraint function is inactive, then the loan rates equilibrium is a solution of the linear system of equations*

$$M_\beta x^* = v,$$

where

$$M_\beta = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_R \end{pmatrix},$$

$$v = (\beta_{1,1}^L[\pi_{1,1} + e_1 + \Delta_1 p_1(\Psi)], \dots, \beta_{1,N}^L[\pi_{1,N} + e_N + \Delta_1 p_1(\Psi)], \dots, \beta_{R,1}^L[\pi_{R,1} + e_1 + \Delta_R p_R(\Psi)], \dots, \beta_{R,N}^L[\pi_{R,N} + e_N + \Delta_R p_R(\Psi)])^T$$

and

$$A_k = \frac{1}{N-1} \begin{pmatrix} 2(N-1)\beta_{k,1}^L & -(1+\beta_{k,1}^L) & \cdots & -(1+\beta_{k,1}^L) \\ -(1+\beta_{k,2}^L) & 2(N-1)\beta_{k,2}^L & \cdots & -(1+\beta_{k,2}^L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(1+\beta_{k,N}^L) & -(1+\beta_{k,N}^L) & \cdots & 2(N-1)\beta_{k,N}^L \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, R.$$

Proof: The KKT conditions for the interest rate equilibrium x_n^* of the n th bank has the following form:

$$\begin{cases} \nabla_{x_n} O_n(x^*) + \lambda_1^{n*} \nabla_{x_n} g_n^1(x_n^*) + \lambda_2^{n*} - \lambda_3^{n*} = 0, \\ \lambda^{n*} = (\lambda_1^{n*}, \lambda_2^{n*}, \lambda_3^{n*})^T \geq 0, \lambda_1^{n*} \in \mathbb{R}, \lambda_2^{n*}, \lambda_3^{n*} \in \mathbb{R}^R, \\ g_n^1(x_n^*) \geq 0, x_{i,n}^* - \underline{x}_i \geq 0, \bar{x}_i - x_{i,n}^* \geq 0, \quad i = 1, \dots, R, \\ \lambda_1^{n*} g_n^1(x_n^*) = 0, \lambda_2^{n*} (x_{i,n}^* - \underline{x}_i) = 0, \lambda_3^{n*} (\bar{x}_i - x_{i,n}^*) = 0, \quad i = 1, \dots, R. \end{cases}$$

For the $1 \leq k \leq R$, k th component from the first equation of the system becomes

$$\frac{\partial}{\partial x_{k,n}} O_n(x^*) + \lambda_1^{n*} \frac{\partial}{\partial x_{k,n}} g_n^1(x_n^*) + \lambda_{2k}^{n*} - \lambda_{3k}^{n*} = 0. \quad (8)$$

(1) Let $x_{k,n}^* \in]\underline{x}_k, \bar{x}_k[$. Then $\lambda_{2k}^{n*} = \lambda_{3k}^{n*} = 0$. We consider two cases.

(i) Let us assume that the solvency constraint is inactive, i.e. $g_n^1(x_n^*) > 0$. Then, from (8), the n th bank's interest rate equilibrium verifies $\frac{\partial}{\partial x_{k,n}} O_n(x^*) = 0$, i.e.

$$L_{k,n} \left\{ 1 - \frac{2\beta_{k,n}^L}{m(x_{k,n}^*)} x_{k,n}^* + \beta_{k,n}^L \left(1 + \frac{\pi_{k,n}}{m(x_{k,n}^*)} + \frac{e_n}{m(x_{k,n}^*)} + \frac{\Delta_k p_k(\Psi)}{m(x_{k,n}^*)} \right) \right\} = 0. \quad (9)$$

Let $x_{k,n}(u) := (x_{1,n}, \dots, x_{k-1,n}, u, x_{k+1,n}, \dots, x_{k,R}; x_{-n})^T$. To investigate the sensitivity depending on parameter z , let us define the function $F_x^{k,n}$ as

$$F_x^{k,n}(z, u) := \frac{\partial}{\partial x_{k,n}} O_n(x_{k,n}(u), z)$$

and consider the equation of the form $F_x^{k,n}(z, u) = 0$. Under the assumption that partial derivatives of $F_x^{k,n}$ exist and are continuous at (z_0, u_0) , and also that $\frac{\partial F_x^{k,n}}{\partial u}(z_0, u_0) \neq 0$, by the implicit function theorem there exists a function φ defined in the neighbourhood of (z_0, u_0) such that $F_x^{k,n}(z, \varphi(z)) = 0$ and $\varphi(z_0) = u_0$. The derivative of φ is given by

$$\varphi'(z) = - \left. \frac{\frac{\partial F_x^{k,n}}{\partial z}}{\frac{\partial F_x^{k,n}}{\partial u}} \right|_{u=\varphi(z)}.$$

In our case, we have

$$\frac{\partial F_x^{k,n}}{\partial u}(z, u) = \frac{\partial^2 O_n}{\partial u^2} = - \frac{2\beta_{k,n}^L L_{k,n}}{m(x_{k,n}^*)} < 0.$$

As a consequence, it holds

$$\text{sign}(\varphi'(z)) = \text{sign}\left(\frac{\partial F_x^{k,n}}{\partial z}(z, \varphi(z))\right).$$

Let us now consider specific parameters instead of z .

- Let z be the sensitivity coefficient $\beta_{k,n}^L$. Then, we have

$$\frac{\partial F_x^{k,n}}{\partial z}(z, u) = L_{k,n} \left\{ -\frac{2u}{m(x_{k,n})} + 1 + \frac{\pi_{k,n}}{m(x_{k,n})} + \frac{e_n}{m(x_{k,n})} + \frac{\Delta_k p_k(\Psi)}{m(x_{k,n})} \right\}.$$

By using (9), we obtain that

$$\frac{\partial F_x^{k,n}}{\partial z}(z, \varphi(z)) = L_{k,n} \cdot \frac{(-1)}{z} < 0.$$

Therefore, the function $\beta_{k,n}^L \mapsto x_{k,n}^*(\beta_{k,n}^L)$ is strictly decreasing.

- Let $z = \pi_{k,n}$ or e_n . Then, we get

$$\frac{\partial F_x^{k,n}}{\partial z}(z, \varphi(z)) = L_{k,n} \frac{\beta_{k,n}^L}{m(x_{k,n})} > 0.$$

Therefore, the functions $\pi_{k,n} \mapsto x_{k,n}^*(\pi_{k,n})$ and $e_n \mapsto x_{k,n}^*(e_n)$ are strictly increasing.

- Let $z = \Delta_k$. Then, we obtain that

$$\frac{\partial F_x^{k,n}}{\partial z}(z, \varphi(z)) = L_{k,n} \frac{\beta_{k,n}^L p_k(\Psi)}{m(x_{k,n})} > 0.$$

Therefore, the function $\Delta_k \mapsto x_{k,n}^*(\Delta_k)$ is strictly increasing.

- Let $z = \Psi$. As $p_k(\cdot)$ is a strictly increasing continuous function, we have

$$\frac{\partial F_x^{k,n}}{\partial z}(z, \varphi(z)) = L_{k,n} \frac{\beta_{k,n}^L \Delta_k p'_k(\Psi)}{m(x_{k,n})} > 0.$$

Therefore, the function $\Psi \mapsto x_{k,n}^*(\Psi)$ is strictly increasing.

- (ii) If the solvency constraint is active, then the premium equilibrium satisfies $g_n^1(x_n^*) = 0$. Let $G_x^{k,n}(z, u) := g_n^1(x_{k,n}(u), z)$ and consider the equation of form $G_x^{k,n}(z, u) = 0$. Then, by the implicit function theorem, there exists a function ψ , such that $G_x^{k,n}(z, \psi(z)) = 0$. The derivative of ψ is given by

$$\psi'(z) = - \left. \frac{\frac{\partial G_x^{k,n}}{\partial z}}{\frac{\partial G_x^{k,n}}{\partial u}} \right|_{u=\psi(z)}.$$

In this case, we get

$$\frac{\partial G_x^{k,n}}{\partial u}(z, u) = L_{k,n} > 0.$$

As a result, it holds that

$$\text{sign}(\psi'(z)) = \text{sign} \left(- \frac{\partial G_x^{k,n}}{\partial z}(z, \psi(z)) \right).$$

The similar sensitivity results can be obtained for specific parameters of z .

- Let $z = K_n$. Then,

$$\frac{\partial G_x^{k,n}}{\partial z}(z, u) = 1 > 0.$$

Therefore, function $K_n \mapsto x_{k,n}^*(K_n)$ is strictly decreasing.

- Let $z = L_{k,n}$. It then holds that

$$\frac{\partial G_x^{k,n}}{\partial z}(z, u) = u - \pi_{k,n} - e_n - \Delta_k p_k(\Psi) - \Delta_k p_k(q_\alpha(\Psi)).$$

Its sign depends on other parameters. Thus, a function $L_{k,n} \mapsto x_{k,n}^*(L_{k,n})$ is not monotone.

- Let $z = L_{i,n}, i \neq k$. Then, we have

$$\frac{\partial G_x^{i,n}}{\partial z}(z, u) = x_{i,n} - \pi_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi) - \Delta_i p_i(q_\alpha(\Psi)).$$

Again, we can conclude that the function $L_{i,n} \mapsto x_{k,n}^*(L_{i,n})$ is not monotone.

- Let $z = \pi_{k,n}$ or e_n . Then, one has

$$\frac{\partial G_x^{k,n}}{\partial z}(z, u) = -L_{k,n} < 0$$

Therefore, functions $\pi_{k,n} \mapsto x_{k,n}^*(\pi_{k,n})$ and $e_n \mapsto x_{k,n}^*(e_n)$ are strictly increasing.

- Let $z = \Delta_k$. In this case, we have

$$\frac{\partial G_x^{k,n}}{\partial z}(z, u) = -L_{k,n}(p_k(\Psi) + p_k(q_\alpha(\Psi))) < 0.$$

Therefore, function $\Delta_k \mapsto x_{k,n}^*(\Delta_k)$ is strictly increasing.

- Let $z = \Psi$. As $p_i(\cdot)$ and $i = 1, \dots, R$ are strictly increasing continuous functions, the following inequality holds

$$\frac{\partial G_x^{k,n}}{\partial z}(z, u) = - \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i p'_i(\Psi) < 0$$

Therefore, function $\Psi \mapsto x_{k,n}^*(\Psi)$ is strictly increasing.

- Last, let $z = \alpha$. As the distribution function of Ψ is strictly increasing and its quantile is increasing, $q_{(\cdot)}(\Psi)$ is an increasing continuous function (see [17]). Therefore,

$$\frac{\partial G_x^{k,n}}{\partial z}(z, u) = - \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i p'_i(q_\alpha(\Psi)) q'_\alpha(\Psi) \leq 0,$$

which means that $\alpha \mapsto x_{k,n}^*(\alpha)$ is increasing.

2. If the solvency constraint is inactive in Nash equilibrium x^* , then taking into account $m(z_{i,n}) = \frac{1}{N-1} \sum_{k \neq n} z_{i,k}$ and from (9), it follows that

$$2\beta_{k,n}^L x_{k,n}^* - (1 + \beta_{k,n}^L) \frac{1}{N-1} \sum_{i \neq n} x_{k,i}^*$$

$$= \beta_{k,n}^L [\pi_{k,n} + e_n + \Delta_k p_k(\Psi)], \text{ for } k = 1, \dots, R, \quad n = 1, \dots, N.$$

This system can be rewritten in matrix form as $M_\beta x = v$. As [7] mentioned, we can see that the matrix M_β is strictly diagonally dominant if $\beta_{k,n}^L > 1$ as $k = 1, \dots, R$ and $n = 1, \dots, N$ are fulfilled. Under this condition, M_β is invertible, and therefore $x^* = M_\beta^{-1} v$.

■

Remark 3.1: (i) If $x_{k,n}^* = \underline{x}_k$ or \bar{x}_k , then the loan interest rate equilibrium is independent of those parameters.

- (ii) For the Basel I solvency constraint Nash game, in addition to the Basel II results, its loan interest rate equilibrium positively depends on the percentage of risk-weighted asset c and risk weights w_i .
- (iii) For the Nash game with ES solvency constraints, as $h_i(\alpha)$, $i = 1, \dots, R$ are increasing and continuous functions, we can prove the same results as from Theorem 3.1.
- (iv) If Ψ is an arbitrary random variable and $p_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, R$ are increasing functions, then according to Lebesgue's theorem for the differentiability of monotone functions (see [15]), $q_{(\cdot)}(\Psi)$ and $p_i(\cdot)$ have at most countably many non-differentiable points. Therefore, the loan interest rate equilibrium almost everywhere positively depends on mixing random variable Ψ and confidence level α . For other parameters, the loan interest rate equilibrium depends on a similar way as Theorem 3.1.
- (v) Following the idea in [4], all discussed models can be extended to multi-period models.

Remark 3.2: The bank loan interest rate Nash problem can be extended to the bank loan deposit interest rate Nash game in the following way. Let us assume that there are S products for deposits and for the n th bank with the j th deposit product $D_{j,n}$ is the amount of the deposit and $y_{j,n}$ is the corresponding interest rate. Then

$$\begin{aligned} O_n(x, y) = & \sum_{i=1}^R L_{i,n} \left(1 - \beta_{i,n}^L \left(\frac{x_{i,n}}{m(x_{i,n})} - 1 \right) \right) (x_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi)) \\ & - \sum_{j=1}^S D_{j,n} \left(1 + \beta_{j,n}^D \left(\frac{y_{j,n}}{m(y_{j,n})} - 1 \right) \right) y_{j,n}, \end{aligned}$$

where $\beta_{j,n}^D > 0$ is the deposit rate elasticity parameter, $y = (y_1^T, \dots, y_N^T)^T$ and $y_n = (y_{1,n}, \dots, y_{S,n})^T$ for $n = 1, \dots, N$. In this case, for example, the Basel II solvency constraint conditional on Ψ is given by

$$g_n^1(x_n, y_n) = K_n + \sum_{i=1}^R L_{i,n} (x_{i,n} - e_n - \Delta_i p_i(\Psi)) - \sum_{j=1}^S D_{j,n} y_{j,n} - \sum_{i=1}^R L_{i,n} \Delta_i p_i(q_\alpha(\Psi)).$$

This loan deposit interest rate Nash game has a unique Nash equilibrium and the sensitivity analysis can be investigated in a similar way. If regulators want to set an interest rate ceiling

for loans, then they can use this model to obtain the optimal loan and deposit interest rates of banks under new loan rate ceiling in advance and make decisions about the ceiling.

Remark 3.3: For a game with one leader and $N-1$ followers with payoff function O_n and the strategy set X_n , the Stackelberg equilibrium is a problem that consists of finding a vector $\bar{x} = (\bar{x}_1^T, \dots, \bar{x}_N^T)^T$, $\bar{x}_n = (\bar{x}_{1,n}, \dots, \bar{x}_{R,n})^T$ such that \bar{x}_1 solves the problem

$$\sup_{y \in X_1} O_1(y; x_2, \dots, x_N),$$

where $(x_2^T, \dots, x_N^T)^T$ is a Nash equilibrium for the game with $N-1$ followers and given strategy x_1 for bank 1, which is assumed to be a leader. In this case, it is not difficult to show the existence of the Stackelberg equilibrium (cf. [7]).

4. Numerical experiments

In this section, we give some numerical results based on the Mongolian bank data representing large, medium, and small sized that dealt with the sensitivity analysis presented in Theorem 3.1 in Section 3. As we mentioned in Section 2, the Nash equilibrium model can be reduced into the variational inequality problem, which consists of finding $x \in \Omega := X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$ such that

$$(VI) \quad \langle F(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in \Omega,$$

where $F(x) = (-\nabla_{x_n} O_n(x))_{n=1}^N$, which will be solved by the hyperplane projection algorithm (see [8] and [21]). This algorithm has also been used in [2,4].

In Mongolia, in 2018, there are 14 commercial banks which are actively competing for financial products. Mongolbank (Mongolian central bank) classified Mongolian commercial banks by three large banks, three medium and rests. Three large and three medium banks composed to 65.0% and 23.2% of total banking system assets, respectively. For 12/31/2018, 1 USD equals 2643.69 MNT (Mongolian tugrik), and by aggregate bank balance report of Mongolbank, banking system asset was 33,053.27 billion MNT (equals to 12,502.70 million USD). The fourth-quarter financial results of these three banks for 2018 are summarized in Table 1. For the capital adequacy ratio, the Mongolian banking system still uses the Basel I ratio at 14%. From Table 1, one can deduce that the second bank has low credit risk as compared to others because it's RWA is significantly lower than it's net loan.

Table 1. Main financial results of the three banks, Q4, 2018, in million USD.

	MS_n	L_n	K_n	K_n/L_n	CAR%	RWA	$\pi_{i,n}$	e_n
Bank 1	18.4%	1,176.3	197.1	16.76%	14.60%	1,350.3	10.58%	1.50%
Bank 2	9.1%	663.2	78.7	11.87%	15.63%	503.8	11.80%	3.17%
Bank 3	2.5%	145.2	30.6	21.10%	17.41%	176.0	12.12%	2.09%

Notes: MS_n is the market share of the selected banks in the banking system total assets, L_n is the bank's net loan and advances, K_n is the bank's capital, K_n/L_n is the ratio between capital and net loan, CAR% is the capital adequacy ratio, RWA is a risk-weighted asset calculated from banks net loan and advance and CAR%, $\pi_{i,n}$ is the ratio between interest income and net loan, and e_n is the ratio difference of non-interest expense (excluding tax expense and loan loss expense) and non-interest income to net loan.

**Table 2.** Parameter estimation and default probabilities.

	μ_i	σ_i	\tilde{p}_i	$\Psi = -2$	$\Psi = -1$	$\Psi = 0$	$\Psi = 1$	$\Psi = 2$	$q_{0.999}(\Psi) = 3.09$
BBB(1)	-3.089	0.428	0.23%	0.00%	0.02%	0.10%	0.39%	1.28%	3.86%
BB(2)	-2.534	0.390	0.91%	0.05%	0.17%	0.56%	1.60%	3.97%	9.18%
B(3)	-1.831	0.396	4.44%	0.44%	1.30%	3.36%	7.57%	14.93%	27.16%

Note: μ_i, σ_i are the Probit-Normal model's parameter estimations, \tilde{p}_i is the average (unconditional) default probability, and Ψ is an economic condition.

As we do not know the default probabilities of the three banks' customers, we assume that their customers' default probabilities are the same as Standard and Poor's ratings of BBB, BB, and B. For BBB, BB, and B ratings, we fit a Probit-Normal Bernoulli mixture model (see [9] and [17]) to the annual default rate data from Standard and Poor's for the period 1981–2017. As Standard and Poor (cf.[22]) only published default rates, we assume that there were 1,000 customers at the beginning of each year between 1981 and 2017, some of whom defaulted. The defaulted number of customers can then be calculated by multiplying the default rates by 1000. We estimated the parameters of the Probit-Normal models using the maximum likelihood method (see [9] and [17]), the results of which are listed in Table 2.

From the table, we can see that, for example, the average default probability of a loan with a BB rating is $\tilde{p}_2 = \mathbb{P}(Y_2 = 1) = \mathbb{E}[p_2(\Psi)] = \mathbb{E}[\mathbb{P}(Y_2 = 1|\Psi)] = \mathbb{E}[\Phi(-2.534 + 0.390\Psi)] = 0.91\%$, where Φ is the standard normal cumulative distribution function, and Ψ is the standard normal random variable. We can also estimate conditional default probabilities from Table 2. For example, for a loan with a BBB rating, its conditional default probability is estimated by $p_1(\Psi) = \mathbb{P}(Y_1 = 1|\Psi) = \Phi(-3.089 + 0.428\Psi)$. Assuming a single yearly random effect represents the state of the economy, columns four to nine illustrate the default probabilities conditional on economic conditions. For example, if the economic condition is getting better, say $\Psi = -2$, then the default probabilities corresponding to the fourth column decrease compared to the average default probabilities corresponding to the third column. In contrast, if the economic condition deteriorates, say $\Psi = 2$, then the default probabilities corresponding to the eighth column increase compared to the average default probabilities corresponding to the third column. From the definition of the quantile, we deduce that the probability of an economic condition worse than $\Psi = 3.09$ is 0.1%. Therefore, the default probabilities of the last column are related to the stress scenario.

Now, we define the base case parameters of the model. As we do not know the loan portfolio structure of the three banks, we assume for all banks that the loan portfolio consists of $s_1 = 30\%$ BBB-rated loans, $s_2 = 40\%$ BB-rated loans, and $s_3 = 30\%$ B-rated loans. For the capital multiplier, we assume that its value is equal to $K = 1$ for the base case. For the interest rate elasticity, we assume that $\beta_{1,n} = 4.5$, $\beta_{2,n} = 4$ and $\beta_{3,n} = 3$ and that it is the same for all banks. For example, if the n th bank's interest rate for a BB loan increases by 1% compared to other banks' average interest rates for a BB loan, then the n th bank will lose 4.5% of the loan portfolio. For the expense rate, we assume that its value is given by the seventh column of Table 1, i.e. $e_1 = 1.50\%$, $e_2 = 3.17\%$, and $e_3 = 2.09\%$. For the break-even interest rate, we assume that the value is given by the sixth column in Table 1, i.e. $\pi_{i,1} = 10.58\%$, $\pi_{i,2} = 11.80\%$, and $\pi_{i,3} = 12.12\%$ for $i = 1, 2, 3$.

Table 3. BIS-II solvency constraint Nash equilibrium results.

P/NE	BIS-II-1	BIS-II-2	BIS-II-3	BIS-II-4	BIS-II-5	BIS-II-6
2. $s\%$	30-40-30	30-40-30	30-40-30	30-40-30	30-40-30	30-40-30
3. K	1	1	1	1	1	1
4. β	4.5-4-3	4.5-4-3	4.5-4-3	5.5-4-2.5	4.5-4-3	4.5-4-3
5. $e\%$	1.5-3.2-2.1	1.5-3.2-2.1	2.5-2.2-2.1	1.5-3.2-2.1	1.5-3.2-2.1	1.5-3.2-2.1
6. π	0	0	0	0	1%	-1%
7. Ψ	base	base	base	base	base	base
8. α	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%
9. Δ	40%	60%	40%	40%	40%	40%
10. $x_{1,1}^*$	0.1716	0.1722	0.1754	0.1628	0.1845	0.1587
11. $x_{2,1}^*$	0.1819	0.1843	0.1857	0.1819	0.1952	0.1685
12. $x_{3,1}^*$	0.2267	0.2400	0.2304	0.2526	0.2417	0.2117
13. $x_{1,2}^*$	0.1827	0.1833	0.1789	0.1739	0.1955	0.1698
14. $x_{2,2}^*$	0.1929	0.1953	0.1891	0.1929	0.2062	0.1796
15. $x_{3,2}^*$	0.2375	0.2508	0.2338	0.2633	0.2525	0.2225
16. $x_{1,3}^*$	0.1798	0.1804	0.1798	0.1710	0.1926	0.1669
17. $x_{2,3}^*$	0.1900	0.1924	0.1900	0.1900	0.2033	0.1767
18. $x_{3,3}^*$	0.2347	0.2480	0.2347	0.2605	0.2497	0.2197

Notes: $s\%$ is a loan portfolio composition, K is a capital multiplier, β is the loan interest rate elasticity, $e\%$ is the expense, π is the increment from base case, break even interest rate, Ψ is an economic condition, α is the confidence level, Δ is the loss given default, and x_{ij}^* , $i, j = 1, 2, 3$, are loan interest Nash equilibrium for the three banks.

For economic condition variable Ψ for the base case, we take the value by conditional default probability, which is equal to the unconditional default. We assume that the confidence level is equal to $\alpha = 99.9\%$ and that for LGD it is equal to $\Delta_i = 40\%$, $i = 1, 2, 3$.

Moreover, for all ratings and banks let interest rates be unconstrained, i.e. $\prod_{i=1}^R [x_i, \bar{x}_i] = \mathbb{R}^R$. In this case, e.g. for ES, the strategy set of the n th bank, $n = 1, 2, 3$ is $X_n^3 = \{x_n \in \mathbb{R}^R \mid g_n^3(x_n) \geq 0\}$. All parameters for the base case are given in the first column of Table 3.

In the BIS-II-1 column in Table 3, we have Nash equilibria corresponding to the base case, where $x_{i,n}^*$ represents a Nash equilibrium for a loan interest rate of the n th bank with i th credit rating. If for all credit ratings, LGD increased by 50%, the loan rate equilibrium is given in the BIS-II-2 column. By comparing BIS-II-1 with BIS-II-2, we can see that the Nash equilibrium increases in BIS-II-2. In the BIS-II-3 column, the expense of the first bank increases by 1%, and the cost of the second bank decreases by 1%. In the BIS-II-4 column, the interest rate elasticity of the loan with a BBB rating increases by 1 and the interest rate elasticity of the loan with a B rating decreases by 0.5 for all banks. If we increase (decrease) the base case break-even interest rates by 1%, we get the BIS-II-5 (BIS-II-6) column. From Table 3, one can deduce that all the results are consistent with Theorem 3.1.

The BIS-II-7 column in Table 4 represents the economic condition that corresponds to $\Psi = -1$ and shows a better scenario compared to the base case. In column BIS-II-8, we have the results that represent the deteriorated economic condition corresponding to $\Psi = 1$. In column BIS-II-9, we considered the stress scenario. For the stress scenario, the stress economic condition that corresponds to $\Psi = 4$ is worse than the Basel-II economic condition, which corresponds to $q_{0.999}(\Psi) = 3.09$, where the Basel-II economic condition means that the probability of an economic condition worse than $\Psi = 3.09$ is 0.1%. The column BIS-II-10 represents the scenario that corresponds to all banks' quality of the loan portfolio decreased as compared to the base case. In this scenario, for all banks, we suppose

**Table 4.** BIS-II solvency constraint Nash equilibrium results (cf. Table 3).

P/NE	BIS-II-7	BIS-II-8	BIS-II-9	BIS-II-10	BIS-II-11	BIS-II-12
2. $s\%$	30-40-30	30-40-30	30-40-30	5-5-90	5-5-90	5-5-90
3. K	1	1	1	1	0.75	0.75
4. β	4.5-4-3	4.5-4-3	4.5-4-3	4.5-4-3	4.5-4-3	4.5-4-3
5. $e\%$	1.5-3.2-2.1	1.5-3.2-2.1	1.5-3.2-2.1	1.5-3.2-2.1	1.5-3.2-2.1	1.5-3.2-2.1
6. π	0	0	0	0	0	0
7. Ψ	-1	1	4	base	base	base
8. α	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%	90.0%
9. Δ	40%	40%	40%	40%	80%	80%
10. $x_{1,1}^*$	0.1706	0.1724	0.2137	0.1716	0.1797	0.1728
11. $x_{2,1}^*$	0.1779	0.1856	0.2649	0.1819	0.1957	0.1867
12. $x_{3,1}^*$	0.2078	0.2454	0.4413	0.2267	0.2729	0.2533
13. $x_{1,2}^*$	0.1816	0.1835	0.2248	0.1827	0.1997	0.1838
14. $x_{2,2}^*$	0.1890	0.1966	0.2759	0.1929	0.2175	0.1977
15. $x_{3,2}^*$	0.2187	0.2563	0.4522	0.2375	0.3034	0.2641
16. $x_{1,3}^*$	0.1787	0.1806	0.2219	0.1798	0.1879	0.1809
17. $x_{2,3}^*$	0.1861	0.1937	0.2730	0.1900	0.2038	0.1948
18. $x_{3,3}^*$	0.2158	0.2534	0.4493	0.2347	0.2809	0.2613

that the loan portfolio consists of 5% BBB, 5% BB, and 90% B rated loans. In column BIS-II-11, we assume that for all banks capital decreased by 25%, and LGD increased by 100% compared to column BIS-II-10. Lastly, column BIS-II-12 represents the scenario that corresponds to the confidence level being equal to $\alpha = 90\%$ compared to column BIS-II-11. One can deduce that all results in Table 4 are in line with Theorem 3.1.

As we can do sensitivity analysis for the Basel I and ES Nash game same as shown in Tables 3 and 4, we restrict our attention to doing a sensitivity analysis of three scenarios. In columns (ES-1)–(ES-3) of Table 5, we give results that correspond to the Nash game with ES solvency constraints. The ES-1 column represents the base case scenario, and column ES-2 represents the results dealing with the deteriorated economic condition that corresponds to $\Psi = 1$. The ES-3 column shows the bad scenario where we assume that for all banks, the loan portfolio consists of 5% BBB, 5% BB, and 90% B rated loans and the capital decreased by 25%, and the LGD doubled compared to the base case. The Mongolian banking system uses the Basel I capital adequacy ratio at 14%, therefore, we considered the Nash game with Basel I solvency constraints.

In columns (BIS-I^{14%} -1)–(BIS-I^{14%} -3) of Table 5, we give results that correspond to the Basel I solvency constraint at 14%. Here, we assume that the scenarios are the same as the scenarios of the Nash game with ES solvency constraints. From columns BIS-II-1 of Table 3 and ES-1, BIS-I^{14%}-1 of Table 5, one can see all interest rate equilibriums are the same. This phenomenon also holds for columns BIS-II-8 of Table 4 and ES-2, BIS-I^{14%}-2 of Table 5. Those phenomena are valid because the Basel I, Basel II, and ES solvency constraints are all inactive. From columns BIS-II-11 of Table 4 and ES-3, BIS-I^{14%}-3 of Table 5, one can deduce that for the banks it is difficult to meet ES solvency constraints compared to the other two constraints and Basel II solvency constraint is the medium one. It is well known that for all $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $ES_\alpha(X) \geq q_\alpha(X)$. Therefore, it is difficult for any bank to meet the ES solvency constraint compared to the Basel II solvency constraints.

Table 5. BIS-I and ES Solvency Constraint Nash Equilibrium Results (cf. Table 3.)

P/NE	ES-1	ES-2	ES-3	BIS-I ^{14%} -1	BIS-I ^{14%} -2	BIS-I ^{14%} -3
2. $s\%$	30-40-30	30-40-30	5-5-90	30-40-30	30-40-30	5-5-90
3. K	1	1	0.75	1	1	0.75
4. β	4.5-4-3	4.5-4-3	4.5-4-3	4.5-4-3	4.5-4-3	4.5-4-3
5. $e\%$	1.5-3.2-2.1	1.5-3.2-2.1	1.5-3.2-2.1	1.5-3.2-2.1	1.5-3.2-2.1	1.5-3.2-2.1
6. π	0	0	0	0	0	0
7. Ψ	base	base	base	base	base	base
8. α	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%	99.9%
9. Δ	40%	40%	80%	40%	40%	80%
10. $x_{1,1}^*$	0.1716	0.1724	0.1848	0.1716	0.1724	0.1728
11. $x_{2,1}^*$	0.1819	0.1856	0.2024	0.1819	0.1856	0.1867
12. $x_{3,1}^*$	0.2267	0.2454	0.2882	0.2267	0.2454	0.2533
13. $x_{1,2}^*$	0.1827	0.1835	0.2113	0.1827	0.1835	0.1838
14. $x_{2,2}^*$	0.1929	0.1966	0.2322	0.1929	0.1966	0.1977
15. $x_{3,2}^*$	0.2375	0.2563	0.3340	0.2375	0.2563	0.2641
16. $x_{1,3}^*$	0.1798	0.1806	0.1930	0.1798	0.1806	0.1809
17. $x_{2,3}^*$	0.1900	0.1937	0.2105	0.1900	0.1937	0.1948
18. $x_{3,3}^*$	0.2347	0.2534	0.2962	0.2347	0.2534	0.2613

Remark 4.1: According to the "Monetary and Financial Statistics of the Mongolbank", the weighted average loan interest rate for Mongolian banking system, which corresponds to loans with 10 months to 1 year maturity, was 19.1% in December 2018. From the base case of the Nash equilibrium loan rates which correspond to the column BIS-II-1 in Table 3 and columns ES-1 and BIS-I^{14%}-1 in Table 5, one can obtain that the weighted loan interest rate is 19.65% for the banks. Thus, the weighted loan interest rate for Mongolian banking system is consistent with the base case theoretical weighted loan interest rate which corresponds to the Nash equilibrium. Since deterioration of economic condition leads to that banks wishes to shrink their loan portfolio, the weighted average loan rate for banking system will increase. For mild adverse economic condition which corresponds to $\Psi = 1$ (see column BIS-II-8 in Table 4 and columns ES-2 and BIS-I^{14%}-2 in Table 5), the weighted loan interest rate of the banks is 20.38% which is greater than the weighted average loan rate of the Mongolian banking system and is compatible with previous fact.

5. Conclusion

The purpose of this paper was to investigate loan interest rate Nash game models in the banking sector under regulatory solvency constraints. According to Theorem 3.1, one can conclude that if an economic condition is getting worse, then to keep the average loan interest rate at current level under competitive banking system, the solvency constraint should be active and regulators should require to increase capitals from commercial banks. Numerical results indicate that the weighted loan interest rate of Mongolian banking system is consistent with the base case theoretical weighted loan interest rate which corresponds to the Nash equilibrium. The suggested model can be used for other banking systems. It would be interesting to consider the models in full stochastic environment, namely stochastic Nash equilibrium problems.

Acknowledgements

The authors would like to thank anonymous reviewers and the editor for their valuable comments that improved the quality of the manuscript.

Disclosure statement

No potential conflict of interest was reported by the author(s).

Notes on contributors

Gankhuu Battulga is Senior Lecturer at National University of Mongolia in Ulaanbaatar. He earned his B.Sc. and M.Sc. degrees in Applied Statistics from National University of Mongolia and his research interests are financial modeling, valuation and time series.

Lkhamsuren Altangerel is Professor at German-Mongolian Institute for Resources and Technology in Ulaanbaatar. He earned his B.Sc. and M.Sc. degrees in Mathematics from National University of Mongolia, and received Ph.D. in Mathematics at Chemnitz University of Technology, Germany in 2006. His research interests are conjugate duality theory, variational inequalities and equilibrium problems with applications in finance and natural resources.

GompilBattur is Assistant Professor at National University of Mongolia in Ulaanbaatar. He earned his B.Sc. and M.Sc. degrees in Applied Mathematics from National University of Mongolia, and received Ph.D. in Mathematics at National University of Mongolia in 2014. His research interests are generalized Nash equilibrium problems, optimization and dynamical systems with applications in economics, operational research and natural resources.

References

- [1] C. Acerbi and D. Tasche, *On the coherence of expected shortfall*, J. Bank. Sci. 26 (2002), pp. 1487–1503.
- [2] L. Altangerel and G. Battur, *Perturbation approach to generalized Nash equilibrium problems with shared constraints*, Optim. Lett. 6(7) (2012), pp. 1379–1391.
- [3] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, and D. Heath, *Coherent measures of risk*, Math. Finan. 9(3) (1999), pp. 203–228.
- [4] G. Battulga, L. Altangerel, and G. Battur, *An extension of one-period Nash equilibrium model in non-life insurance markets*, Appl. Math. (Irvine) 09(12) (2018), pp. 1339–1350.
- [5] T.G. Boonen, A.A. Pantelous, and R. Wu, *Non-cooperative dynamic games for general insurance markets*, Insur. Math. Econ. 78 (2018), pp. 123–135.
- [6] I. Drumond and J. Jorge, *Loan interest rates under risk-based capital requirements: The impact of banking market structure*, Econ. Model. 32 (2013), pp. 602–607.
- [7] C. Dutang, H. Albrecher, and S. Loisel, *Competition among non-life insurers under solvency constraints: A game-theoretic approach*, Eur. J. Oper. Res. 231(3) (2013), pp. 702–711.
- [8] F. Facchinei and J.S. Pang, *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Vols. 1,2, Springer, New York, 2003.
- [9] R. Frey and A. McNeil, *Dependent defaults in models of portfolio credit risk*, J. Risk 6(1) (2003), pp. 59–92.
- [10] Financial Stability Institute, *FSI Survey–Basel II, 2.5 and III Implementation*, BIS, Basel, 2015.
- [11] C. Furfine, *Bank portfolio allocation: The impact of capital requirements, regulatory monitoring and economic conditions*, J. Financ. Serv. Res. 20 (2001), pp. 33–56.
- [12] M.B. Gordy, *A risk-factor model foundation for ratings-based bank capital rules*, J. Finan. Intermed. 12(202) (2003), pp. 199–232.
- [13] M. Keeley and F. Furlong, *A re-examination of mean-variance analysis of bank capital regulation*, J. Bank. Finance 14 (1990), pp. 69–84.

- [14] D. Kim and A. Santomero, *Risk in banking and capital regulation*, J. Finance 43(5) (1988), pp. 1219–1233.
- [15] A.W. Knapp, *Basic Real Analysis*, Birkhaeser, Boston, 2005.
- [16] M. van Leuvensteijn, C.K. Sorensen, J.A. Bikker, and A. van Rixtel, *Impact of bank competition on the interest rate pass-through in the euro area*, Appl. Econ. 45(11) (2013), pp. 1359–1380.
- [17] A.J. McNeil, R. Frey, and P. Embrechts, *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*, Princeton University Press, NJ, 2005.
- [18] A.A. Pantelous, *An investigation of the theory of bank portfolio allocation within a discrete stochastic framework using optimal control techniques*, J. Interdiscip. Math. 11(2) (2008), pp. 187–212.
- [19] J.B. Rosen, *Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games*, Econometrica 33(3) (1965), pp. 520–534.
- [20] G. Scutari, D.P. Palomar, F. Facchinei, and J.S. Pang, *Convex optimization, game theory, and variational inequality theory*, IEEE. Signal. Process. Mag. 27(3) (2010), pp. 35–49.
- [21] M.V. Solodov and B. F. Svaiter, *A new projection method for variational inequality*, SIAM J. Control Optim. 37(3) (1999), pp. 765–776.
- [22] S&P, *Default, Transition and Recovery: 2017 Annual Global Corporate Default Study and Rating Transitions. Global Fixed Income Research*. Standard & Poors Financial Services, 2018.



A game theory application in the copper market

Ch. Otgochuluu ^a, L. Altangerel ^{b,*}, G. Battur ^c, Ch. Khashchuluun ^d, G. Dorjsundui ^b

^a The Economic Policy and Competitiveness Research Centre, Ulaanbaatar, Mongolia

^b Faculty of Mathematics, Computer, and Natural Sciences, German-Mongolian Institute for Resources and Technology, Nalaikh, Mongolia

^c Department of Applied Mathematics, National University of Mongolia, Ulaanbaatar, Mongolia

^d Department of Economics, National University of Mongolia, Ulaanbaatar, Mongolia

ARTICLE INFO

Keywords:

Copper market

Non-cooperative games

Cournot–Nash competition

Variational inequality approach

ABSTRACT

Mongolia has a small open economy that is growing due to its status as one of the major copper exporters in the Asian copper market. We used game theory to analyze the Chinese copper market and determine the competitive strategies used by Mongolian exporters. We show that a variational inequality approach is one option to prove that game theory is applicable in the analysis of the Chinese copper market, as it is spatial and concentrated. To solve the profit maximization problem with a concave objective function for each player and linear strategy set, it can be reduced to variational inequalities. Numerical calculations allow us to predict the responses of certain parameters against external factors or so-called non-economic shocks, such as changes in Chinese import policies, strikes in Chile, etc. In the future, if Mongolia builds a new copper smelter, it will be a competitor within a more concentrated market than that of the current copper concentrate trade. Thus, the importance of developing such a model is increasing.

1. Introduction

The international copper trade is of great importance to the global economy, and there is growing interest among researchers in determining the competitive behavior of red-metal exporters. Currently, China is the biggest importer of copper (as well as copper concentrate) and accounts for almost half of the world's consumption. This demand is attracting an ever-increasing number of potential suppliers, while existing incumbents are trying to protect their shares in this growing market by investing in capacity extension. Thus, it is of significant interest to determine the competitive strategies of the major exporters to China and evaluate different options by using game theory. Game theory has been widely applied in many fields, including economics, social sciences, engineering, industry policy, international trade, and negotiating techniques. Recently, the applications of game-theoretical approaches have expanded to a larger scale than equilibrium models in the field of economics as well as for research around commodity markets. Similar studies have been conducted by Lorenczik and Panke (2016) and Lorenczik et al. (2017), and a great deal of research work has also been carried out in the energy and coal sectors. One way to solve the Nash equilibrium problem is to reduce it to variational inequality problems, as the players' utility functions need to be simultaneously optimized for their respective strategy sets. Harker (1984, 1986) surveyed the general oligopoly theory and general spatial

equilibrium to understand how they can be reduced into variational inequalities and links between markets. Recently, the investigations into the generalized Nash equilibrium have also been intensified (see for instance Facchinei and Kanzow (2010)). For recent applications of the Nash equilibrium in insurance and banking, we refer to Battulga et al. (2018).

We aimed to investigate the applicability of game-theory-based models in analyzing the market as well as the competitive strategies of Mongolian (copper) concentrators as agents (players) in the Chinese market by using the generalized Nash equilibrium model. To solve the profit maximization problem with a concave objective function for each player and linear strategy set, the model was reduced to variational inequalities.

With regard to economics, in this paper, we address the competitive strategies within the Chinese market that are used by big copper miners from Chile, Peru, Australia, Indonesia as well as two miners from Mongolia who represent small suppliers. To the best of our knowledge, this is the first attempt to use game theory to define such strategies, especially in the copper market. Although similar work has been carried out by Lorenczik and Panke (2016) in the international coal market, our work differs from their study many ways. First, we chose the copper sector due to its importance for Mongolian macroeconomic stability; second, we employed a variational inequality approach (see Altangerel

* Corresponding author.

E-mail addresses: otgochuluu@board.mik.mn (Ch. Otgochuluu), altangerel@gmit.edu.mn (L. Altangerel), battur@seas.num.edu.mn (G. Battur), khashchuluun@num.edu.mn (Ch. Khashchuluun), dorjsundui@gmit.edu.mn (G. Dorjsundui).

Table 1
World copper production by country (in %)

Source: <https://www.icsg.org>.

Country	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
Chile	16	18	25	35	36	34	31
China	3	3	4	4	5	8	9
Peru	5	3	4	4	7	7	7
USA	13	18	19	11	8	7	7
Congo	6	4	0	0	0	3	6
Australia	3	3	4	6	6	5	5
Russia	0	0	5	4	4	4	4
Zambia	6	5	3	2	3	4	4
Canada	9	8	7	5	4	3	4
Mongolia	0	0.5	0.9	1	1	2	2

and Battur (2012)); and third, we included a new shared constraint that represents the import market volume with the aim of capturing policy shocks.

2. International and Chinese copper market

According to the US Geological Survey, the world had proven reserves of 770 million tons of copper in 2017. The total installed mine capacity is around 22 million tons per year. The international copper study group maintains an up-to-date database of registered mines. There are over 366 registered mines on the list, and 220 of them are estimated to be active during any given year. Chile has the highest level of proven reserves and the largest installed mine capacity. However, due to a decrease in the copper grade, the main copper deposits are expected to be depleted over the next few decades. Overall, the trend toward a supply shortage in the market will continue to increase in the near future.

2.1. International market and its concentration

Based on the Herfindahl-Hirschman index (HHI),¹ The world copper market can be described as having almost free competition; it has a very low HHI score of 299.3. The ten largest mines and two in Mongolia (Oyu Tolgoi² and Erdenet³) together produce 29% of the world's total supply. According to game theory, each country or producer is a "price taker" in the world copper market. The total copper (concentrate) exports reached a value of \$ 58.5 billion in 2017, with 54% of the total volume being delivered by mines in South America, especially Chile and Peru. Mongolia was the second biggest exporter in Asia after Indonesia. On the other hand, the total import value was \$ 58.5 billion in 2017, and Chinese smelters alone accounted for 43% of this total. If we include Japan, India, and South Korea, Asian buyers accounted for 77% of the total global imports.

Table 1 shows the trend in the market concentrations of producer nations, which especially reflects the rise of the Chilean and Chinese markets.

Chile has mines owned by the Chilean state as well as mines operated by multinational corporations. Thus, we assumed that not all

¹ The HHI is a standard measure of market concentration and is used to determine market competitiveness. A market with an HHI score of less than 1500 is a competitive marketplace, 1500 to 2500 is a moderately concentrated marketplace, and 2500 or greater is a highly concentrated marketplace.

² Oyu Tolgoi, a copper-gold mine in the South Gobi region of Mongolia, approximately 550 km south of the capital Ulaanbaatar, holds one of the largest undeveloped high-grade copper deposits in the world. (www.ot.mn).

³ Erdenet Mining Corporation SOE is one of the biggest ore mining and processing factories in Asia. At present it is a fairly large complex processing 26 million tons of ore per year and producing around 530.0 thousand tons of copper concentrate and around 4.5 thousand tons of molybdenum concentrates annually. (<https://www.erenetmc.mn/en>).

of the mines in Chile follow the "nation's strategy", and each of them participates in the international market as a single player or profit-maximizing agent. Table 2 shows the market concentration based on mines (instead of nations), taking the year 2015 as an example.

At the mine level, we can see a more "free" or competitive market.

2.2. Chinese import market as a concentrated and spatial market

Herfindahl (1967) defined spatial markets according to transport opportunities. Further, Zhang et al. (2017) argued that the Chinese copper industry can be considered a spatial market. The calculated average HHI value of the Chinese import market for copper concentrate, which was around 2300, shows that the market is heavily concentrated. Thus, as suggested by Luengo (2015), the oligopoly theory accurately explains this situation. In reality, the Chinese market can be classified as being between highly and moderately concentrated. Thus, we considered the Chinese import market as concentrated and, based on the oligopoly theory, took into account factors such as dominant state-owned enterprises and state policies on import tariffs, reserves, the environment, protection, and the security of supplies. In 2007, the total Chinese import value was \$ 8.5 billion, of which miners from South America contributed 58.9%. The five biggest suppliers were Chile, Peru, Mongolia, Australia, and the USA. After ten years, in 2017, the import value increased to \$ 25 billion, and South America contributed 57.2%. The five biggest suppliers at this stage were Peru, Chile, Mongolia, Australia, and Mexico. The future demand is expected to grow due to urbanization, investments in infrastructure, and the use of electric vehicles.

The concentration of the Chinese copper import market is different from that of the global market due to its spatial characteristics. Further, Zhang et al. (2017) argued that Chinese smelters have become more dependent on copper concentrate imports and that this import market can be described as a spatial market due to the transportation and tariff constraints present (see Table 3).

3. Cournot-Nash equilibrium models in China's copper market

Cournot (1838) established the foundation of the oligopoly theory by modeling the competition between two producers (duopoly). Later, Nash (1951) extended the competition model and provided a generalized form with n players. As mentioned above, many research studies have been carried out on the equilibrium models of oligopolistic markets. Hashimoto (1985) and Harker (1986) argued that variational inequality is suitable for analyzing a spatial market with a homogeneous product. Dafermos and Nagurney (1987) showed that game-theory-based oligopolistic game models are applicable in constrained spatial markets, which are more concentrated than standard "free" markets. We argue that the natural commodity market (in this case, that of copper concentrate) is oligopolistic due to bulk trade, the need for substantial investment, and the dominant Chinese market.

3.1. The classical model and variational inequality formulation

With oligopolistic market equilibrium, we assumed that there are n firms producing a common homogeneous commodity, and the price p_i of firm i depends on the total quantity $\sigma = \sum_{i=1}^n x_i$. Let $h_i(x_i)$ denote the cost of the firm i with respect to the production level x_i . Then, the profit of the firm i is given by

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i p_i \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) - h_i(x_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Let $X_i \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ be the strategy set of the firm i , which is assumed to be convex. Each firm would aim to maximize its own profit by simultaneously choosing a production level and point. $x^* =$

Table 2
Market share of world mines and concentrators, 2015.
Source: <https://comtrade.un.org/data>.

	Country	Ownership	Production (copper, thous. tn)	Market share (%)	Rank
Escondida	Chile	BHP (57.50)	715.2	4.6	1
Grasberg	Indonesia	Freeport, Indonesian Gov	539.1	3.5	2
Collahuasi	Chile	Glencore(44) Anglo-American	493.7	3.2	3
El Teniente	Chile	Codelco(100)	464.0	3.0	4
Antamina	Peru	Glencore(33.75) BHP(33.75)	438.6	2.8	5
Cerro verde	Peru	Freeport(53.56)	424.7	2.7	6
KGHM	Poland	KGHM(100)	417.3	2.7	7
Polska Miedz					
Norilsk	Russia	PJSC(100)	344.7	2.2	8
Los Pelambres	Chile	Antofagasta(60)	344.0	2.2	9
Oyu Tolgoi	Mongolia	THR(66)	180.9	1.2	25
Erdenet	Mongolia	GoM(51)	141.8	0.9	35
Union Section	South Africa	Anglo-American(85)	0.1	0.0	211
Rest			11,095.9	71.0	
TOTAL			15,600.0	100	

$(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ can be said to achieve Nash equilibrium if

$$f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{i-1}^*, y_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \leq f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), \forall y_i \in X_i, \forall i. \quad (1)$$

Moreover, we assumed that each h_i is continuously differentiable on X_i , and concave with respect to x_i . Then, for each player, we would have a convex optimization problem, and the optimality condition for the solution becomes

$$-\langle \nabla_{x_i} f_i(x^*), x_i - x_i^* \rangle \geq 0, \forall x_i \in X_i. \quad (2)$$

where $\nabla_z g(z)$ is a gradient vector of g with respect to variable z and $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ is the dot product of two n -dimensional vectors.

By introducing $F(x) := (-\nabla_{x_1} f_1(x), \dots, -\nabla_{x_n} f_n(x))$, the problem (1) can be reduced to the variational inequality problem, which consists of finding x^* such that

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in X. \quad (3)$$

3.2. A generalized Nash equilibrium model in the copper market

We assumed that Chile, Peru, Australia, and Mongolia all export copper concentrate to the Chinese market and considered the Cournot-Nash competition with four players competing in the Chinese copper market. As per Lorenczik et al. (2017)'s idea, we introduced the following model for the copper market: Each player makes simultaneously decisions based on their respective capacities, costs, other players' outputs, and market demand, price, and investment. All the players are price takers and try to reach a profit-maximizing goal function. Thus, the k th player has the following problem: ($k = 1, \dots, 4$) (see Tables 4 and 5).

$$\max_{(x_{ki}, y_{ki})} \sum_{i=1}^{|M_k|} [x_{ki} P_k - C_{ki}^{var}(x_{ki}) - c_{ki}^{inv} y_{ki}]$$

$$X_k = \{(x_{ki}, y_{ki}) : P_k = (a_k - b_k Q),$$

$$x_{ki} - y_{ki} \leq cap_{ki}^0,$$

$$(Z_k) y_{ki} \leq y_{ki}^{max},$$

$$Q = \sum_{k=1}^N x_k, \quad x_k = \sum_{i=1}^{|M_k|} x_{ki},$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 \leq Total,$$

$$x_{ki}, y_{ki} \geq 0, \quad i = 1, \dots, |M_k|.$$

Table 3
Share in value in China's e imports.
Source: www.trademap.org.

Exporters	2007	2011	2017
Chile	33.8	24.4	27.5
Peru	22.4	16.1	29.9
Australia	7.9	10.7	5
Canada	2.6	5.3	2
USA	5.4	4	2.6
Mongolia	10.6	6.7	6.2

Table 4
Model parameters and variables.

M_k	Set of copper mines k th country
$C_{ki}^{var}(x_{ki}) = (\tau_{ki} + v_{ki})x_{ki}$	Total variable costs, (production and transportation)
$c_{ki}^{inv} y_{ki}$	Investment expenditures
cap_{ki}^0	The initial production capacity
y_{ki}^{max}	The maximum capacity expansion
$a_i, i = 1, 2, 3, 4$	Share of the player i in the Chinese copper market
<i>Total</i>	Total Chinese import (Total ≤ 1)

Table 5
Selected copper mines.

N	Mine	Country	Company (equity, %)	Production (thous. tn)
1	Escondida	CHL	BHP Billiton (57.5)	973.2
2	Grasberg	IDN	Freeport-McMoRan (90.64)	523.6
3	Collahuasi	CHL	Anglo American (44.00)	509.0
4	El Teniente	CHL	Codelco (100.00)	448.0
5	Cerro Verde	PER	Freeport-McMoRan (53.56)	403.1
6	Antamina	PER	BHP Billiton (33.75)	399.0
7	Las Bambas	PER	MMG (62.50)	394.7
8	Los Pelambres	CHL	Antofagasta (60.00)	345.9
9	Olympic Dam	AUS	BHP Billiton (100.00)	183.3
10	Erdenet	MNG	Government of Mongolia (51)	140.7
11	Oyu Tolgoi	MNG	Turquoise Hill Resources (66)	135.6
12	Prominent Hill	AUS	OZ Minerals (100.00)	105.3

4. Numerical experiments

4.1. Variational inequality formulation

As mentioned in Section 3.1, the Nash equilibrium model can be reduced to the variational inequality problem (3), and gradient vectors for each player can be calculated as follows.

Table 6
Input parameters.

Country	Mines	Export	Investment
CHL	Escondida	x_{11}	y_{11}
	Collahuasi	x_{12}	y_{12}
	El Teniente	y_{13}	y_{13}
	Los Pelambres	x_{14}	y_{14}
PER	Property	x_{21}	y_{21}
	Antamina	x_{22}	y_{22}
	Las Bambas	x_{23}	y_{23}
AUS	Prominent Hill	x_{31}	y_{31}
	Olympic Dam	x_{32}	y_{32}
MNG	Erdenet	x_{41}	y_{41}
	Oyu Tolgoi	x_{42}	y_{42}
IDN	Grasberg	x_{51}	y_{51}

Table 7
Results with four countries, 2018 (thousands of tons)

Mines	Export	Investment	Profit (\$, thousand)	Actual export
x_{11}	1070.5	97.3	7,251.02	978.8
x_{12}	559.9	50.9	7,251.02	515.9
x_{13}	492.8	44.8	7,251.02	454.1
x_{14}	380.5	34.6	7,251.02	350.8
x_{21}	443.4	40.3	4,282.56	405.4
x_{22}	438.9	39.9	4,282.56	404.7
x_{23}	434.2	39.5	4,282.56	396.6
x_{31}	183.3	0	726.161	184.9
x_{32}	115.8	10.5	726.161	113.7
x_{41}	140.7	0	444.484	149.7
x_{42}	135.6	0	444.484	136.7

Four Chilean exporters:

$$\nabla f_1 = \left(\begin{array}{c} a_k - b_k Q - \tau_{1i} - v_{1i} + \sum_{i=1}^4 x_{1i}(-b_k) \\ -c_{1i} \end{array} \right)_{i=1}^4,$$

Three Peruvian exporters:

$$\nabla f_2 = \left(\begin{array}{c} a_k - b_k Q - \tau_{2i} - v_{2i} + \sum_{i=1}^3 x_{2i}(-b_k) \\ -c_{2i} \end{array} \right)_{i=1}^3,$$

Two Australian exporters:

$$\nabla f_3 = \left(\begin{array}{c} a_k - b_k Q - \tau_{3i} - v_{3i} + \sum_{i=1}^2 x_{3i}(-b_k) \\ -c_{3i} \end{array} \right)_{i=1}^2,$$

Two Mongolian exporters:

$$\nabla f_4 = \left(\begin{array}{c} a_k - b_k Q - \tau_{4i} - v_{4i} + \sum_{i=1}^2 x_{4i}(-b_k) \\ -c_{4i} \end{array} \right)_{i=1}^2.$$

Therefore, the input parameters can be summarized as follows:

$$(x_1, \dots, x_8) := (x_{1i}, y_{1i}), i = 1, \dots, 4,$$

$$(x_9, \dots, x_{14}) := (x_{2i}, y_{2i}), i = 1, \dots, 3,$$

$$(x_{15}, \dots, x_{18}) := (x_{3i}, y_{3i}), i = 1, \dots, 2,$$

$$(x_{19}, \dots, x_{22}) := (x_{4i}, y_{4i}), i = 1, \dots, 2.$$

Moreover, using the notations

$$X = X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4, F(x) = (\nabla f_i(x))_{i=1}^4,$$

we obtain the problem (3).

Table 8
Results with five countries, 2018 (thousands of tons)

Mines	Export	Investment	Profit (\$, thousand)	Actual export
x_{11}	683.4	97.3	7,252.07	973.2
x_{12}	536.6	50.9	7,252.07	509
x_{13}	504.7	44.8	7,252.07	448
x_{14}	369.7	34.6	7,252.07	345.9
x_{21}	489.6	40.3	4,283.25	403.1
x_{22}	425.1	39.9	4,283.25	399
x_{23}	464.1	39.5	4,283.25	394.7
x_{31}	195.7	0	726.317	183.3
x_{32}	115.6	10.5	726.317	105.3
x_{41}	141.1	0	444.626	140.7
x_{42}	142.9	0	444.626	135.6
x_{51}	500	0	1,957.22	523.6

4.2. Numerical results

The modeled results are similar to the actual data. The significant differences between some mines can be explained by short-term non-economic disturbances, such as the strikes in Chile and community protests in Peru (see Tables 7 and 8).

4.3. Simulation results

The Chinese copper (concentrate) import volume fluctuates between 3 and 5 million tons per year (2016–2018). The total import volume can sharply decrease for many reasons (supporting domestic miners, environmental issues, etc.). In addition, the total import volume can drastically increase, causing reserves to build up, especially if the prices are down and supply distortions are expected in the future. How can Mongolian exporters respond to these changes? (See Fig. 1) Similar simulations can be constructed to predict reactions to other factors such as increases in competitors' capacity.

Using this model, we can also predict the impact of certain policy shocks. For example, there was high fluctuation in the import volume to China in 2016–2018 (3–5 million tons) due to Chinese policy and market changes to protect the domestic mines and build up stocks (strategic reserves). To capture this development, we used the numerical parameter of *Total*. The response result of this parameter shows that Mongolian miners should theoretically be able to export copper if the Chinese import volume exceeds 1.75 tons. If imports are below that level, Mongolian miners may not be able to conduct any export business to China; we assume that the high expenses that Mongolian miners bear explains this result of the model. If the Chinese import volume surpasses 2.25 million tons, Mongolian exporters can mobilize to their full capacity.

Fig. 1 depicts a comparison of the modeled results and actual data using line plots (a, b) as well as quantile plots (c, d) and indicates that the model is relatively accurate.

With the simulation model being validated, several sensitive and parametric analyses were carried out. In Fig. 2, the y-axis shows the simulated export volumes of the Mongolian miners, and the x-axis shows the numerical input of the *Total* parameter, indicating the Chinese import volume. In extreme cases, if Chinese imports drop below 1.5 million tons, only Chilean miners would have a non-negative export value, which can be interpreted to reflect that Chilean miners have a higher capacity for survival than their Mongolian competitors (see Fig. 3). We believe that cost advantages play a major role in the same.

Similar simulations can be carried out using other numerical parameters such as demand elasticity. Paulus et al. (2011) considered the reaction to a demand side price by computing four-player model runs for a [-4, 0] bandwidth of elasticities. Peru and Chile's demands are stable under China's viable demand, while Mongolia and Australia's productions are sensitive and shown in Fig. 4.

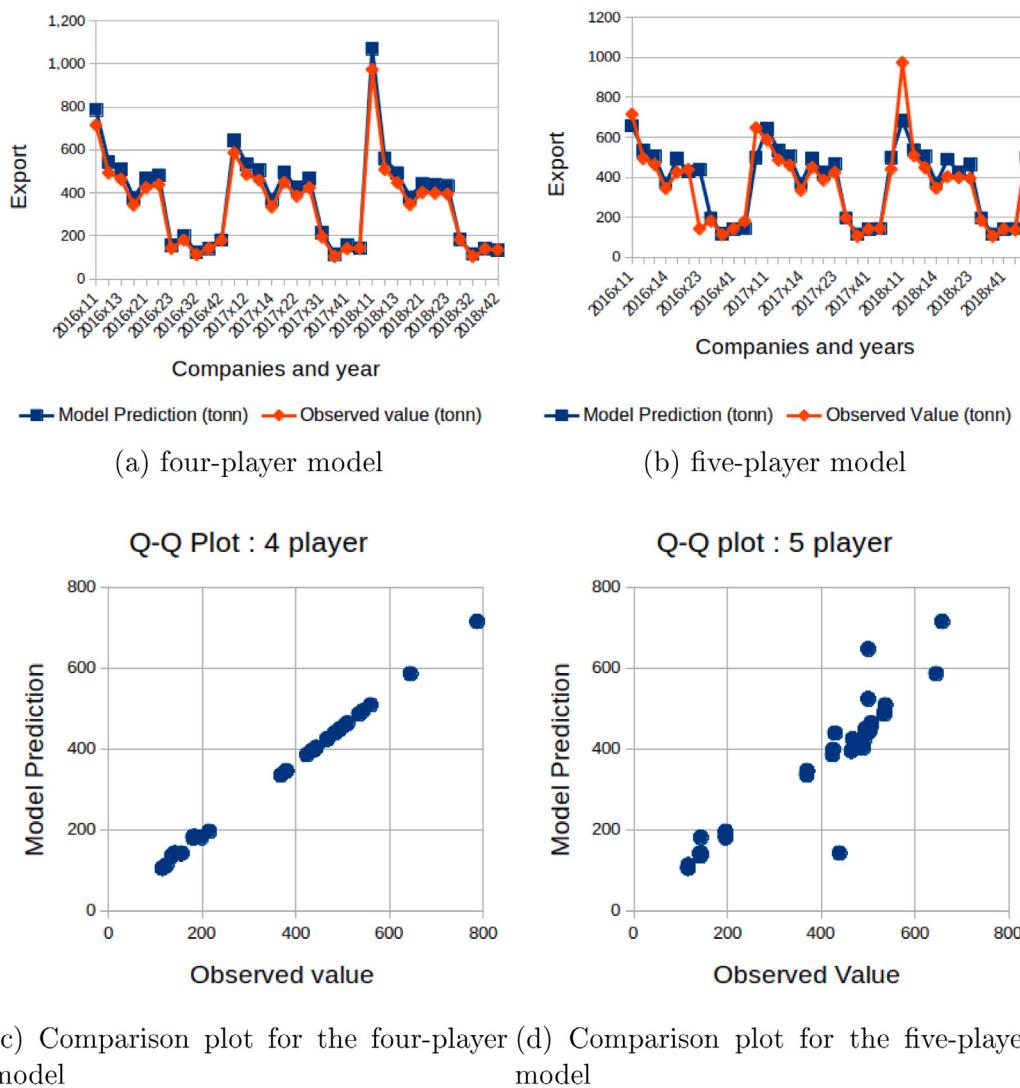


Fig. 1. A comparison of the modeled results and actual data (in thousands of tons), where 2016 x 11 indicates the value of Escondida's export in 2016 (cf. Table 6).

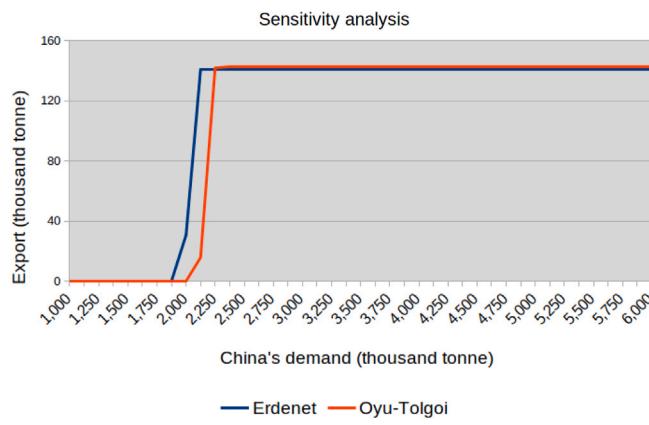


Fig. 2. Response of Mongolian mining companies to China's demand (in thousand tons) ..

Fig. 4 shows the production plan of the four players under viable elasticity. Mongolian miners are less responsive to price movements if the elasticity is calibrated to “free market” levels, which means that these miners would be less competitive if the Chinese import market moves toward a freer model (see **Fig. 5**), but the current concentrated market might provide more opportunities for Mongolian exporters. If

the underground mine expansion of Oyutolgoi is completed, the market power of this miner could increase, and an updated analysis can be carried out based on this model. The Erdenet mining operation can increase its profitability by committing to a long-term cost-optimization strategy.

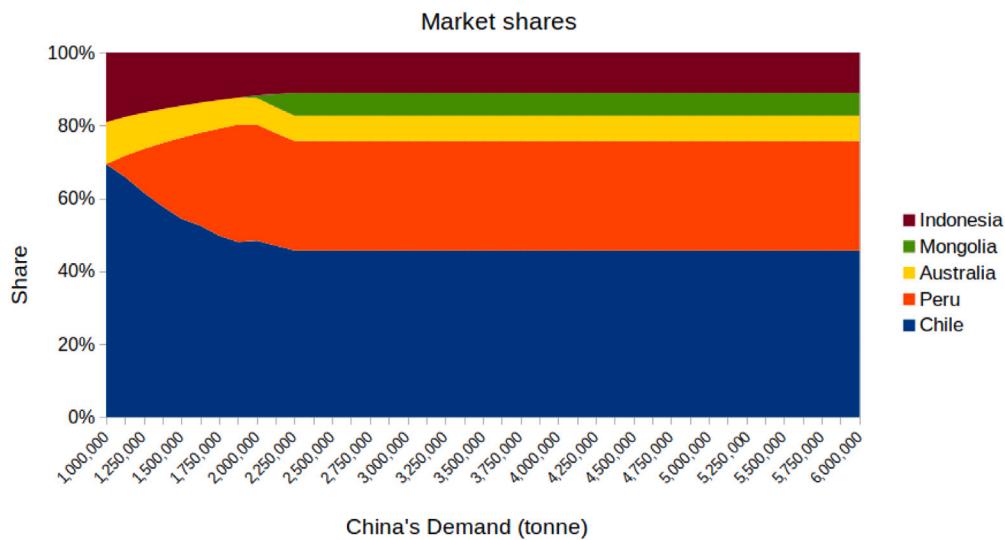


Fig. 3. Dynamic responses of the selected country's share in varying China's demand.

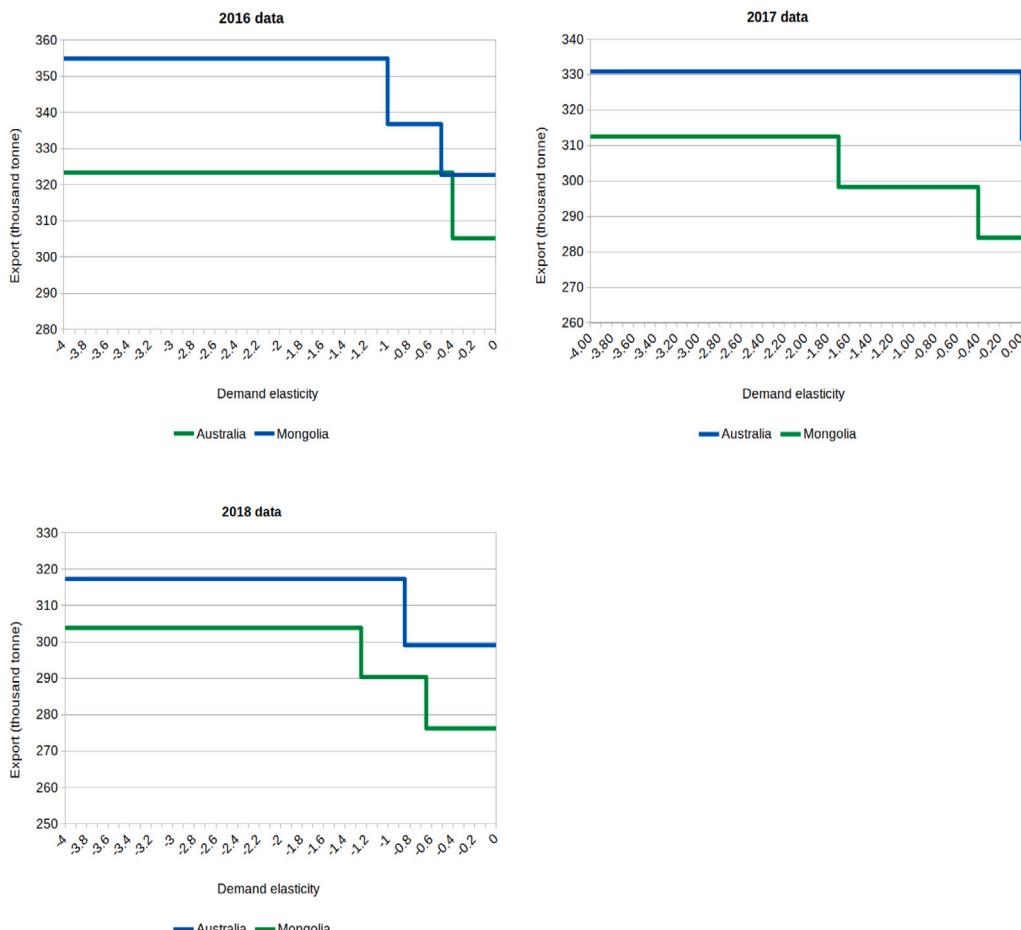


Fig. 4. Reactions of countries' export volumes under viable demand elasticity: four-player model.

5. Conclusion

In this paper, we have presented the current situation of the global copper market, which involves “free competition”. Based on a similar

analysis of the Chinese import market, we have suggested that the Chinese market is spatial and highly concentrated, allowing for the application of game-theory-based models. Based on [Lorenczik et al. \(2017\)](#), we created a simplified model with a single buyer but added

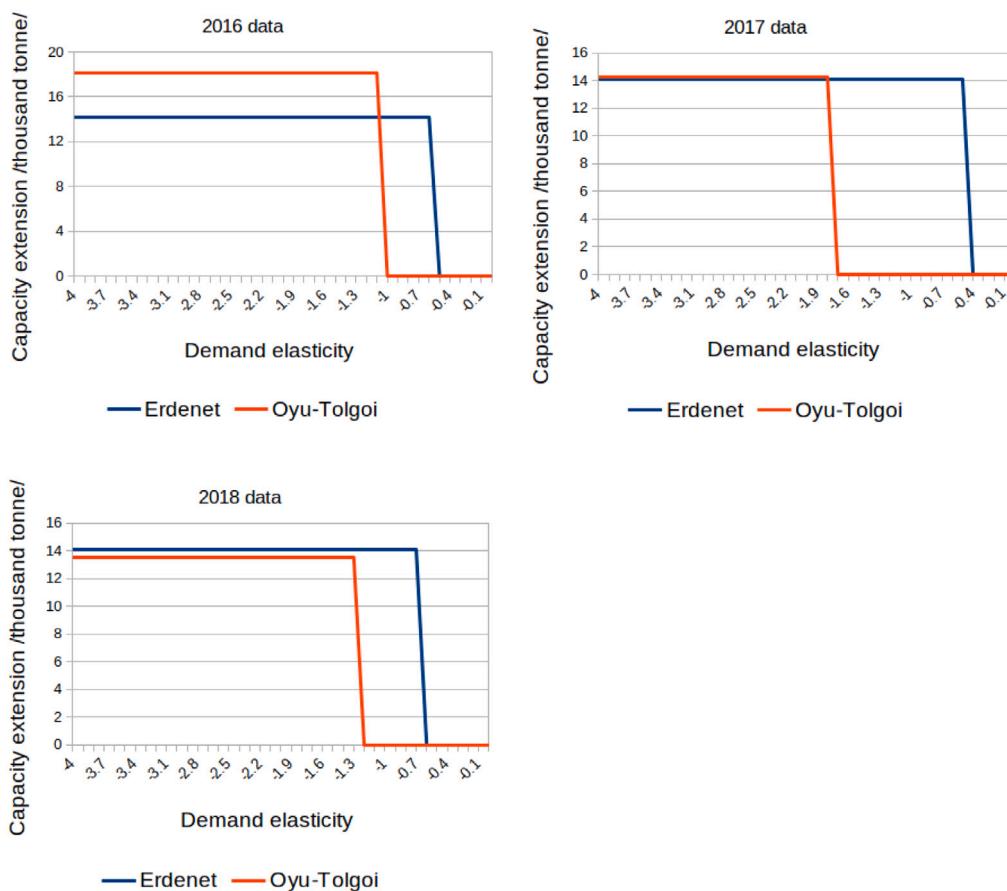


Fig. 5. Capacity extension of Mongolian miners under viable demand elasticity: four-player model.

a new constraint, namely the Chinese copper concentrate import volume. Another difference was our suggestion of a variational inequality approach for solving the model. We chose 12 copper mines from Chile, Peru, Mongolia, Australia, and Indonesia as competing players in the Chinese copper market. Altogether, these mines supplied 75 percent of the Chinese market's copper demand in 2016–2018. However, five of them (Escondida, Antamina, Las Bambas, Los Pelambres, Prominent Hill) are projected to shut down between 2027 and 2040, while the Chinese demand will continue to increase. On the one hand, this could provide a tremendous opportunity for Mongolian miners, but on the other hand, Mongolia might become more dependent on China. The Mongolian copper mining sector should invest in optimization and efficiency as well as market research. This paper represents the first ever attempt to use game theory to analyze the international copper market. The model used in this paper can be further extended to a dynamic game or new markets, especially the copper cathode market if Mongolia builds a new copper smelter.

CRediT authorship contribution statement

Ch. Otgochuluu: Conception and design of the study, Data acquisition, Writing - original draft, Writing - review & editing. **L. Altangerel:** Analysis and/or interpretation of data, Writing - original draft, Writing - review & editing. **G. Battur:** Analysis and/or interpretation of data. **Ch. Khashchuluun:** Conception and design of the study. **G. Dorjsundui:** Analysis and/or interpretation of data, Writing - review & editing.

Acknowledgments

The second, third and fifth author were partially supported by Mongolian Foundation for Science and Technology. The authors would

like to thank the editor and the anonymous referee for careful reading of the paper and valuable comments. Also, authors wish to express their sincere gratitude to Ph.D Ms. Ongonsetseg Radnaa-Ochir, an investment policy officer of the Erdenes Mongol LLC, for providing us the market data.

References

- Altangerel, L., Battur, G., 2012. Perturbation approach to generalized Nash equilibrium problems with shared constraints. Optimization Letters 6 (7), 1379–1391.

Battulga, G., Altangerel, L., Battur, G., 2018. An extension of one-period Nash equilibrium model in non-life insurance markets. Applied Mathematics 9, 1339–1350.

Cournot, A.A., 1838. Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses. English translation by N. T. Bacon published in Economic Classics, Macmillan, 1838, and reprinted in 1960 by Augustus M. Kelly.

Dafermos, S., Nagurney, A., 1987. Oligopolistic and competitive behavior of spatially separated markets. Regional Science and Urban Economics 17 (2), 245–254.

Facchinei, F., Kanzow, C., 2010. Generalized Nash equilibrium problems. Annals of Operations Research 175, 177–211.

Harker, P.T., 1984. A variational inequality approach for the determination of oligopolistic market equilibrium. Mathematical Programming 30 (1), 105–111.

Harker, P.T., 1986. Alternative models of spatial competition. Operations Research 34 (3), 410–425.

Hashimoto, H., 1985. A spatial Nash equilibrium model. In: Harker, P.T. (Ed.), Spatial Price Equilibrium: Advances in Theory, Computation and Application. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp. 20–40.

Herfindahl, O.C., 1967. Depletion and economic theory. In: Gaffney, M. (Ed.), Extractive Resources and Taxation. Univ. of Wisconsin Press, pp. 63–90.

Lorenzczik, S., Malischek, R., Trüby, J., 2017. Modeling strategic investment decisions in spatial markets. European Journal of Operational Research 256 (2), 605–618.

- Lorenzicik, S., Panke, T., 2016. Assessing market structures in resource markets : An empirical analysis of the market for metallurgical coal using various equilibrium models. *Energy Economics* 59, 179–187.
- Luengo, A.E., 2015. Essays on the Industrial Organisation of the International Copper Industry (Ph.D. thesis). University of Southampton.
- Nash, J., 1951. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics* 54 (2), 286–295.
- Paulus, M., Trüby, J., Growitsch, C., 2011. Nations as Strategic Players in Global Commodity Markets: Evidence from World Coal Trade. EWI Working Papers 2011-4, Energiewirtschaftliches Institut an der Universitaet zu Koeln (EWI).
- Zhang, L., Chen, T., Yang, J., Cai, Z., Sheng, H., Yuan, Z., Wu, H., 2017. Characterizing copper flows in international trade of China, 1975–2015. *Science of the Total Environment* 601–602, 1238–1246.

МОНГОЛ УЛСЫН ИХ СУРГУУЛЬ



**ХЭРЭГЛЭЭНИЙ МАТЕМАТИК 2018
ИЛТГЭЛИЙН ХУРААНГУЙ**

УЛААНБААТАР

2018-11-17

		<p>Хугацаанаас хамаарсан Шредингерийн тэгшилтгэлийг Псевдоспектриал ба Дискрет хувьсагчийн аргаар ишийдэх Шинжлэх Ухаан Технологийн Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухааны Сургууль</p>	Н.Тунгалаг
15:00-15:15	А.Амгалан	<p>Шүүгчийн цэгэн өгөгдлөөс онцгой шугамыг ялгах арга Монгол Улсын Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухаан, Инженерчлэлийн Сургууль</p>	
15:15-15:30	Л.Оюунцэцэг	<p>Дифференциал тэгшилтгэлээр ба энгийн рекуррэнт аргаар бодох бодлогууд Монгол Германы Технологийн Их Сургууль</p>	
15:30-15:45	Г.Батулаа	<p>Stochastic Dividend Discount Model Based on VAR process Монгол Улсын Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухаан, Инженерчлэлийн Сургууль</p>	
15:45-16:00	Л.Амарсанаа	<p>Програм хангамж мэргэжлийн сургалтын хөтөлбөрийг сүлжээ графын арга хэрэглэн төлөвлөх боломжийг судалсан нь Хөдөө Аж Ахуйн Их Сургууль</p>	
16:00-16:15		Цайны заварлага	
16:15-16:30	Д.Цоодол	<p>Нэрт математикч Л.С. Понтрягины мэндэлсний 110 жилийн ойд (төвч намтар, бүтээл) Монгол Улсын Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухаан, Инженерчлэлийн Сургууль</p>	
16:30-16:45	Г.Махгал	<p>Univariate and Multivariate Random Variable Simulation Based on a Sample with The R Package simukde Монгол Улсын Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухаан, Инженерчлэлийн Сургууль</p>	
16:45-17:00	З.Ууганбаяр	<p>Дифференциал тэгшилтгэлийн симметрийд, түүний хэрэглээ Монгол Улсын Их Сургууль, Шинжлэх Ухааны Сургууль</p>	Ж.Энхбаяр
17:00-17:15	Ц.Цэцэгсүрэн	<p>Квадрат саадыг тойрох 2 хэмжээст урсгалын шинж чанарыг торын больцманы аргаар тооцоолоход захын нохцлийн нөлөөлөл Шинжлэх Ухаан Технологийн Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухааны Сургууль</p>	
17:15-17:30			

Үс, цаг уур, цэвдэг судалын салбар хуралдаан

СХ-Б	Монгол Улсын Их Сургуулийн Төв Номын Сангийн байр 2 давхарт	202 тоот өрөө	
	Хугацаа	Илтгэгч, илтгэлийн сэдэв	Хурлын дарга
11:45-12:00	Л.Жамбажамц Хүйтэн хориг циклоны тоон шинжилгээний зарим дүнгээс (WRF-ARW симуляци)		
	Монгол Улсын Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухаан, Инженерчлэлийн Сургууль		
12:00-12:15	А.Даваадорж Дэлхийн хэмжээний агаар мандлын өрөнхий орчил урсгалын загварыг Монгол орны бүс нутагт түрших, зүгшрүүлэх Үс цаг уур орчны судалгаа мэдээллийн хүрээлэн		Г.Сарантuya
12:15-12:30	Н.Нандинцэцэг		

		Улаанбаатар хотын бохир усыг цэвэрлэхэд үүсэх хүлэмжийн хий, түүнийг бууруулах боломж Монгол Улсын Их Сургууль, Шинжлэх Ухааны Сургууль
12:30-12:45	Ш.Лазина ОМІ төхөөрөмжийн хэмжигдэхүүнүүдийн Монгол орон дахь статистик анализ Монгол Улсын Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухаан, Инженерчлэлийн Сургууль	
12:45-13:00	Э.Түмэнсувд “Эрдэнэт үйлдвэр” ХХК-ийн дулааны цахилгаан станцаас агаар мандаалд хаягдах бохирдуулагч бодисыг бууруулах арга зам Шинжлэх Ухаан Технологийн Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухааны Сургууль	
13:00-13:20	Хуралд оролцогчдын зураг авах	
13:30-14:30	Өдрийн зоог	
14:30-14:45	Ц.Хонгор Монгол орны ойн талбай дээрээс ялгарч буй хүлэмжийн хийн хэмжээ НҮБ-ын Хүнс, Хөдөө аж ахуйн байгууллага	
14:45-15:00	Б.Түмэндэмбэрэл Экологийн оношилгооны аргууд Шинжлэх Ухаан Технологийн Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухааны Сургууль	
15:00-15:15	Ш.Отгонсүрэн Голын урсацад ирээдүйн уур амьсгалын өөрчлөлтийн үзүүлэх нөлөө Монгол Улсын Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухаан, Инженерчлэлийн Сургууль	3.Мөнхцэцэг
15:15-15:30	Т.Гэрэлмаа Сансрын зайнлас тандан судлах аргыг усны чанарын мониторинг хийхэд ашиглах нь /хөвсгөл нуурын жишээн дээр/ Шинжлэх Ухаан Технологийн Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухааны Сургууль	
15:30-15:45	М.Энх-Үүр Хотын усны хөх ул мөрийн тооцоолол, Улаанбаатар хотын жишээн дээр Монгол Улсын Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухаан, Инженерчлэлийн Сургууль	
15:45-16:00	Д.Номиндарь Өгий нуурын ай савын геологи орчинд үйлчлэх усны аж ахуйн техноген ачаалал Шинжлэх Ухаан Технологийн Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухааны Сургууль	
16:00-16:15	Цайны завсарлага	
16:15-16:30	С.Туяа Монгол орны хээрийн бусийн гадаргуугийн ууришилтыг хиймэл дагуулын мэдээгээр тодорхойлох Шинэлэх Ухаан Технологийн Их Сургууль, Хэрэглээний шинжлэх ухааны сургууль	
16:30-16:45	Ч.Даваасүрэн Монгол орны бэлчээрийн экосистемийн тэнцвэрт бус динамикийн судалгаа Шинжлэх Ухаан Технологийн Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухааны Сургууль	Л.Жамбажамц
16:45-17:00	З.Наранмандах Дундговь аймгийн Дэлгэрцогт сумын сансарын зурагт геологийн тайлалт, боловсруулалт хийх Шинжлэх Ухаан Технологийн Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухааны Сургууль	

А.Энхбаяр (доктор Sc.D)
enkhbayar.a@seas.num.edu.mn

Монгол Улсын Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухаан, Инженерчлэлийн Сургууль

Орчин үеийн тоног төхөөрөмжүүд болох лидар, лазер сканнерыг ашиглан өгөгдсөн биетийн гадаргуун цэгэн өгөгдлийг бүртгэн авч, өндөр нарийвчлалтай дискрет гадаргуу байгуулах боломжтой болсон. Ийнхүү байгуулсан их хэмжээний цэгэн өгөгдлүүдийн шуугианыг арилгах, нэг координатын системд бүртгэх, онцгой шугамуудыг байгуулах зэрэг нь практикт өндөр ач холбогдолтой байдаг. Сүүлийн үед энэ чиглэлээр хийгдэж байгаа математик аргуудыг танилцуулна.

INTEGRO CUBIC SPLINE ON ARBITRARY SPACED SUB-INTERVALS

T. Zhanlav¹, P. Мижиддорж² (доктор Sc.D)
mijiddorj@msue.edu.mn

¹ Монгол Улсын Их Сургууль

² Монгол Улсын Боловсролын Их Сургууль

In this talk, we consider an integro cubic spline problem to reconstruct an approximating function by using the integral values on arbitrary successive subintervals. The general approximation error is studied and the super-convergence property is also derived when the interval is equally partitioned. Moreover, it works successfully when not-a-knot boundary conditions are given. Shape preserving properties of the integro cubic spline are also studied. Numerical experiments show our method is easy to implement and effective.

КВАЗИ-ВАРИАЦИЙН ТЭНЦЭТГЭЛ БИШИЙН ХУВЬД ДИНАМИК СИСТЕМТЭЙ ХОЛБОГДОХ ЗАРИМ АЛГОРИТМ

Л.Алтангэрэл (доктор Sc.D)
altangerel@gmit.edu.mn

Монгол-Германы хамтарсан ашигт малтмал, технологийн их сургууль

Оптимизацийн бодлогын шийдийг дифференциал геометр дөхөлтийн тусlamжтайгаар олох алгоритмын талаар анх 1980-аад оны сүүлээр судлагдаж эхэлсэн бөгөөд сүүлийн жилүүдэд энэ чиглэлээр эрчимтэй судалгаа явагдаж байна. Тухайлбал, оптимизацийн бодлого ([1]), вариацийн тэнцэтгэл биш ([5]), ерөнхийлсэн тэгшитгэл ([6]) болон квази-вариацийн тэнцэтгэлийн бишийн ([2-4]) хувьд шинэ алгоритмууд судлагдах болсон. Квази-вариацийн тэнцэтгэл биш нь механикийн загвартай холбоотойгоор анх томъёологдсоноос гадна ерөнхийлсэн Нэшийн тэнцвэрийн бодлоготой ([7]) холбогддог. Түүнээс гадна дурс боловсруулалт, сүлжээний урсгалын бодлогыг ийм хэлбэрийн загварт шилжүүлж болно. Нөгөө талаас, энэ бодлогын хувьд шийдийг олох алгоритм боловсруулах чиглэлд цаашид эрчимтэй судалгаа шаардлагатай бөгөөд энэ илтгэлийн хүрээнд зарим алгоритмын талаар авч үзэх болно.

Ном зүй

1. Antipin, A.S. (1994) *Minimization of convex functions on convex sets by means of differential equations*, Differential equations 30, No. 9, 1365-1375.
2. Antipin, A.S.; Jaćimović, M.; Mijajlović N. (2017) *Extragradient method for solving quasivariational inequalities*, Optimization, DOI: 10.1080/02331934.2017.1384477
3. Mijajlović, N.; Jacimovic, M. (2015) *A proximal method for solving quasi-variational inequalities*, } Computational Mathematics and Mathematical Physics 55, No. 12, 1981--1985, 2015.
4. Mijajlovic, N.; Jacimovic, M.; Noor, M.A. (2018) Gradient-type projection methods for quasi-variational inequalities, Optimization Letters, DOI: 10.1007/s11590-018-1323-1
5. Chen, C.H.; Ma, S.; Yang, J. (2015) *A general inertial proximal point method for mixed variational inequality problem*, SIAM Journal on Optimization 25, No. 4, 2120-2142.
6. Lorenz D.; Rock, T. (2015) *An inertial forward-backward algorithm for monotone inclusions*, Journal of Mathematical Imaging and Vision 51, No. 2, 311-325.
7. Harker, P.T. (1991) *Generalized Nash games and quasi-variational inequalities*, European Journal of Operations Research 54, No.1, 81-94.

УУЛ УУРХАЙН КОМПАНИЙН ЭРГЭЛТИЙН ХӨРӨНГИЙН БҮТЦИЙГ ОНОВЧЛОХ НЬ

Ж.Энхбаяр¹ (доктор Sc.D), М.Эрдэнэбат¹, Э.Одонтуяа¹

enkhbayar.j@seas.nmu.edu.mn

¹ Монгол Улсын Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухаан, Инженерчлэлийн Сургууль

² Монгол Улсын Их Сургууль, Бизнесийн Сургууль

Эрнст энд Янг компани дэлхийн томоохонд тооцогдох уул уурхайн 80 компанийн эргэлтийн хөрөнгөө удирдах үйл явцыг шинжлэхэд уул уурхайн компаниудад мөнгөн хөрөнгийн урсгалыг сайжруулах, зардлыг бууруулах хөшүүрэг болгох замаар эргэлтийн хөрөнгийг ашигладагтүй гэсэн дүгнэлтэд хүрчээ. Эргэлтийн хөрөнгийн үр ашигтай удирдлага хэрэгжүүлдэг компани нь хөрөнгийн хэмжээг нэмэгдүүлсэн хэдий ч санхүүгийн зардлыг бууруулах замаар ашигт ажиллагааг нэмэгдүүлэх боломжтой. Энэ нь эргэлтийн хөрөнгийг аль болох хүү багатай эх үүсвэрээр санхүүжүүлэх шаардлагатай, уул уурхайн компаниудын хувьд эргэлтийн хөрөнгийн зохицтой бүтэцтэй байх нь үр ашигт нэмэгдүүлэх боломжтойг харуулж байна.

EXPRESSING MANIFOLD M USING CLASSICAL SPECIAL FUNCTIONS

Д.Цэвээннамжил

tseveennamjil.d@muls.edu.mn

Хөдөө Аж Ахуйн Их Сургууль

Painlevé equations are nonlinear second-order ordinary differential equations defined on the complex plane. It has six basic forms. Each of Painlevé equations has its own description in terms of Hamiltonian systems. In sequel, those Hamiltonian systems can be expressed by special functions as like Gaussian hypergeometric equation (GHGE), Kummer's confluent hypergeometric equation, Bessel equation, Hermite-Weber equation, and Airy equation. It is

Монгол Улсын Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухаан, Инженерчлэлийн Сургууль

Энэ ажилд шуугиант цэгэн өгөгдлөөс онцгой шугамуудыг ялгахдаа гадаргуун вариацийн функцийг ашигласан. Шуугиант цэгэн өгөгдөл дээр илүү тогтвортойгоор онцгой цэгүүдийг ялгахын тулд цэг тус бүр дээр эзлэхүүнээс хамаарсан шинэ хэмжээсийг нэмж оруулсан. Мөн энэхүү аргыг илүү тогтвортой, хялбар болохыг харуулахын тулд өмнө байсан бусад аргуудтай харьцуулсан.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЭГИТГЭЛЭЭР БА ЭНГИЙН РЕКУРРЭНТ АРГААР БОДОХ БОДЛОГУУД

Л. Оюунцэцэг (доктор Ph.D)

oyuntsetseg@gmit.edu.mn

Монгол Германы хамтарсан ашигт малтмал, Технологийн Их сургууль

Зарим нэг бодлогыг дифференциал тэгшитгэлээр бодохоос гадна энгийн рекуррэнт аргаар бodoх ба тэр холбоонос зарим чухал томъёог томъёолох боломжийг харах юм.

STOCHASTIC DIVIDEND DISCOUNT MODEL BASED ON VAR PROCESS

Г.Баттулга

battulga.g@seas.num.edu.mn

Монгол Улсын Их Сургууль, Хэрэглээний Шинжлэх Ухаан, Инженерчлэлийн Сургууль

This paper deals with some results of stochastic dividend discount model based on VAR process. We get following main results: In this paper we derived closed form formula of multi-period theoretical price of six type stocks and introduce impulse response analysis. When innovation process has multivariate normal distribution we get closed form expression for distribution of future stock price. We analytically derives a formula for the covariance between future random stock prices. We obtain closed form formula and recurrent formula for linear minimum MSE predictor of all six type stocks. Also we construct formula of maximum likelihood estimation and generalized least estimation for all six type stocks. Finally, we developed connection between stochastic dividend discount model and portfolio selection theory.

ПРОГРАМ ХАНГАМЖ МЭРГЭЖЛИЙН СУРГАЛТЫН ХӨТӨЛБӨРИЙГ СУЛЖЭЭ ГРАФЫН АРГА ХЭРЭГЛЭН ТӨЛӨВЛӨХ БОЛОМЖИЙГ СУДАЛСАН НЬ

Л. Амарсанаа

amar@muls.edu.mn

Хөдөө Аж Ахуйн Их Сургууллийн Инженер, Технологийн Сургууль

Орчин үед олон шинжлэх ухааны салбар тэдгээрийн дотроос нийгмийн шинжлэх ухаан, боловсролын салбарын судалгаа шинжилгээнд ч математикийн арга техникиүүд өргөн хэрэглэгдэх болсон. Сургалтын үйл ажиллагааны загварчлалд графын онолыг хэрэглэж оновчлох

Gap Functions for Quasi-variational Inequalities via Duality

L.Altangerel

German-Mongolian Institute for Resources and Technology

December 19, 2018
The Vienna Workshop on Computational Optimization 2018





Vienna Graduate School on
Computational Optimization



Vienna Workshop on Computational Optimization

December 17-19, 2018 | University of Vienna



The 6th International Conference on Optimization, Simulation and Control (COSC2019)

PROGRAM AND ABSTRACTS



www.anjigai.blog.mn



June 21-23, 2019
Ulaanbaatar, Mongolia

Organizing Institute

National University of Mongolia

University of the Humanities

German-Mongolian Institute for Resources and Technology

Organizing Committee

Co-chairs

Enkhbat Rentsen (National University of Mongolia)

Battuvshin Chuluundorj (University of the Humanities)

Altangerel Lkhamsuren (German-Mongolian Institute for Resources and Technology)

Altannar Chinchuluun (National University of Mongolia)

International Program Committee

Kok Lay Teo (Curtin University, Australia)

Jirimutu (Inner Mongolia University for the Nationalities, China)

Hsiao-Fan Wang (National Tsing Hua University, China)

Masao Fukushima (Nanzan University, Japan)

Masaru Kamada (Ibaraki University, Japan)

Gerhard-Wilhelm Weber (Middle East Technical University, Turkey)

Honglei Xu (Curtin University, Australia)

I. Tseveendorj (Universite de Versailles-Saint Quentin, France)

S. Bau (University of the Witwaterstand, South Africa)

Radu Ioan Bot (University of Vienna, Austria)

B.A. Srochko (Irkutsk State University, Russia)

A.S. Antipin (Moscow Computational Center, Russia)

B.S. Buldaev (Buryat State University, Russia)

R.Vogel (Farmingdale State College, USA)

O. Vasilyeva (University of Valle, Colombia)

A.D. Mijidion (East-Siberian University of Technology, Russia)

Joydeep Dutta (Indian Institute of Technology, India)

Khalide Jbilou (Universite du Littoral Cote d'Opale, France)

Session F1: Optimization, Control and Simulation

Library Building, NUM

5th floor, room 502

Time	Speaker and title	Chair
------	-------------------	-------

14:00-14:15	Ider Tseveendorj <i>Laborator of Mathematics in Versailles, UVSQ, Université Paris Saclay, France</i> Covering Balls Techniques for Nonconvex Optimization	
14:15-14:30	L. Altangerel <i>German-Mongolian Institute for Resources and Technology, Mongolia</i> Variational Inequalities And Some Applications of Nash Equilibrium Problems	
14:30-14:45	B. Saheya and Jein-Shan Chen <i>I College of Mathematical Science, Inner Mongolia Normal University, P. R. China</i> Comparison of Eight Smoothing Neural Networks For Absolute Value Equation	Ch.Altannar
14:45-15:00	Mend-Amar Majig , Bayartugs Tamjav <i>National University of Mongolia, Mongolia</i> University Timetabling With Evolutionary Algorithm	
15:00-15:15	R.Mijiddorj , T.Zhanlav <i>Mongolian National University of Education, Mongolia</i> Numerical Solution of Burgers' Equation by Local Integro Spline	
15:15-15:30	Coffee Break	

	<i>Odontuya Enkhbayar, Batnasan Namsrai (National University of Mongolia)</i>
17:00-18:00	WEALTH DISTRIBUTION AND INCOME INEQUALITY IN MONGOLIA GINI COEFFICIENT CALCULATION <i>Ayush Battsengel (National University of Mongolia)</i>
17:00-18:00	NUMERICAL SOLUTION OF THE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN EQUATION FOR STOCHASTIC OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH HARA UTILITY FUNCTION AND PROPORTIONAL TRANSACTION COSTS <i>Nyamsuren Dorj, Batsukh Tserendorj (Mongolian University of Science and Technology, University of Finance and Economics, Mongolia)</i>
17:00-18:00	FINANCIAL ANALYSIS FOR MINING COMPANIES IN MONGOLIA <i>L. Naranchimeg and U. Ariunbold (National University of Mongolia)</i>
17:00-18:00	MATHEMATICAL MODEL AND RESULTS OF COAL GASIFICATION <i>T.Bayartugs , A.Tumenbayar and D.Dashpuntsag (Mongolian University of Science and Technology)</i>
17:00-18:00	MONGOLIA OPTIMIZATION PROBLEMS OF WORKING CAPITAL STRUCTURE IN CASE MONGOLIAN MINING COMPANIES <i>Enkhbayar Jamsranjav, Erdenebat Munkhdalai, (Mongolian National University)</i>
17:00-18:00	PROCESS OPTIMIZATION OF COPPER LEACHING <i>G. Dorjsundui (German-Mongolian Institute for Resources and Technology)</i>
17:00-18:00	STOCHASTIC (N + 1)-PERIOD DIVIDEND DISCOUNT MODEL BASED ON COMPOUND NON HOMOGENEOUS POISSON PROCESS <i>Battulga Gankhuu, Jacob Kleinow, Altangerel Lkhamsuren, (National University of Mongolia, Mongolia)</i>
17:00-18:00	AN IMAGE SEGMENTATION ALGORITHM USING GLOBAL AND LOCAL IMAGE FITTING ENERGY BASED ON FRACTIONAL DERIVATIVE <i>Dultuya Terbish, Enkhbolor Adiya and Tserennadmid Tumurbaatar (National University of Mongolia, Mongolia)</i>

23 June, 2019

COUNTRYSIDE TRIP FOR FOREIGN PARTICIPANTS

Departure time	Depart from
09:30	III corpus of NUM

МОНГОЛ УЛСЫН ИХ СУРГУУЛЬ



Хэрэглээний шинжлэх
ухаан, Инженерчлэлийн
сургууль



МОНГОЛ-ГЕРМАНЫ ХАМТАРСАН
АШИГТ МАЛТМАЛ
ТЕХНОЛОГИЙН ИХ СУРГУУЛЬ

ХЭРЭГЛЭЭНИЙ МАТЕМАТИК 2019

**ХУРЛЫН ХӨТӨЛБӨР
ИЛТГЭЛИЙН ХУРААНГУЙ**

УЛААНБААТАР

2019-11-23

Зохион байгуулагч байгууллага

МУИС-ийн ХШУИС-ийн Хэрэглээний Математикийн Тэнхим

Монгол-Германы Хамтарсан Ашигт Малтмалын Технологийн Их Сургууль

Зохион байгуулах комисс

С.Батбилэг (Ph.D), А.Энхболор (Ph.D), З.Мичидмаа (Магистр), Э.Мөнхцэцэг (Ph.D), М.Хулан (Магистр), З.Мөнхцэцэг (Магистр), Б.Ганболд (Магистр), Ж.Энхбаяр (Ph.D),

Эрдэм шинжилгээний зөвлөл

Р.Энхбат (Sc.D), А.Энхбаяр (Ph.D), Д.Баянжаргал (Ph.D), Л.Жамбажамц (Ph.D)

ХУРЛЫН ХӨТӨЛБӨР

08.40-9.00

Монгол Улсын Их Сургуулийн Төв номын сангийн
байр 5 давхарт

Бүртгэл

Үндсэн
хуралдаан

502 тоот хурлын өрөө

Нээлтийн үйл ажиллагаа
09:00-09:10 МУИС-ийн ХШУИС-ийн ХМТ-ийн эрхлэгч доктор **С.Батбилэг** үг хэлнэ.

Хугацаа	Илтгэгч, илтгэлийн сэдэв	Хурлын дарга
09:10-09.40	Р. Энхбат МУИС-ийн Бизнесийн сургууль Оновчлол, оновчтой удирдлагын эдийн засгийн хэрэглээ"	
09:40-10:10	E.R.Csetnek <i>University of Vienna, Faculty of Mathematics</i> Proximal splitting methods in image processing	
10:10-10:50	П.Гомболүүдэв, Л.Нацагдорж УЦУОСМХ Монгол орны уур амьсгалын өөрчлөлт, агаар мандал-газар бүрхэвчийн харилсан үйлчлэл	Д.Баянжаргал
10:50-11:00	Хуралд оролцогчдын зураг авах	
11:00-11:20	Цайны завсарлага	

Хэрэглээний математик, статистикийн салбар хуралдаан

CX-A	Монгол Улсын Их Сургуулийн Төв номын сангийн байр 2 давхарт	502 тоот өрөө	
Хугацаа	Илтгэгч, илтгэлийн сэдэв	Хурлын дарга	
11:20-11:35	Б.Сэр-Од ШУТИС, ХШУИС Мэдлэгийн инженерчлэл ба фази математик		
11:35-11:50	А. Бат-Эрдэнэ¹, Р. Мижиддорж² ¹ БНХАУ, Хөх хотын Багшийн их сургууль ² МУБИС, Мэдээлэл зүйн тэнхим Тех систем дэх монгол хэлний багцын зарим асуудалд		
11:50-12:05	Ц.Батсүх СЭЗИС Монгол Улсын Бүсчлэлийн нэгэн загвар		Ж.Энхбаяр
12:05-12:20	Д.Хонгорзул, З.Ууганбаяр МУИС,ХШУИС Бутархай эрэмбийн дифференциал тэгшитгэлийн Ли симметр анализ		
12:20-12:35	Ц.Балжиням, А.Гомбосүрэн ШУТИС, ХШУИС Spectral mapping theorem and its applications		
12:40-14:00	Одрийн зоог NOVOTEL 1 давхар		
14:00-14:15	Б.Барсболд, Г.Дэнзэн МУИС, ХШУИС An Optimal Control Problem for Financial Management		
14:15-14:30	Т. Жанлав, Х. Отгондорж IMDT, MAS, SEAS, NUM and SAS, MUST Optimization by parameters in the iterative methods for solving nonlinear equations		
14:30-14:45	Г.Махгал, Ц.Нарангэрэл МУИС, "ХШУИС		С.Батбилэг

ХУРААНГҮЙ

ОНОВЧЛОЛ, ОНОВЧТОЙ УДИРДЛАГЫН ЭДИЙН ЗАСГИЙН ХЭРЭГЛЭЭ

Р.Энхбат

МУИС-ийн Бизнесийн сургууль
renkhbat46@yahoo.com

Илтгэлд оновчлол, оновчтой удирдлагын асуудлууд зах зээлийн эдийн засгийн тулгамдаж буй асуудлуудыг шийдвэрлэхэд өргөнөөр хэрэглэгдэж байна. Оновчлолын онолын глобал оптимизацийн орчин үеийн аргууд эдийн засгийн онолын Леонтьевын орц, гарцын загвар, Валрасын эдийн засгийн тэнцвэрийн онол, Канторовичийн шугаман програмчлалын онол, Понтряганы оновчтой удирдлагын онол, Нэшийн тоглоомын онол, Солоугийн өсөлтийн загвар, Рамсайн татварын онол зэрэг асуудлуудыг тоймлон авч үзнэ. Түүнчлэн олон тоглогчтой тоглоомын онолыг глобаль оптимизаци руу шилжүүлэн, Нэшийн тэнцвэр болох оновчтой нөхцлийг томьёолно. Үйлдвэрлэлийн функцийн тавигдах шаардлагыг сурлуулах замаар Солоугийн өсөлтийн загвар нь гүдгэр биш оновчлолын болон параметрт оптимизацийн бодлого руу шилжүүлэхийг харуулна. Эцэст нь Скул, Марковичийн загварууд дээр үндэслэн татварын оновчтой удирдлагын бодлого ба багц сонголтын динамик оновчлолын бодлогуудыг шинээр томьёолно.

PROXIMAL SPLITTING METHODS IN IMAGE PROCESSING

Csetnek Ernö Robert

University of Vienna, Faculty of Mathematics
ernoe.robert.csetnek@univie.ac.at

Several applications in image processing, data classification, clustering, etc. can be modeled as structured non-smooth optimization problems. We start with a short introduction into first order methods of proximal-splitting type. These are numerical methods where each object is evaluated individually during the scheme, either by means of the prox-operator (for non-smooth functions) or by the gradient for the smooth terms. We propose a unifying scheme, which covers and improve the convergence analysis of several methods from the literature, like the ADMM, Proximal ADMM and primal-dual algorithms. We test the theoretical results on an example in image processing.

Variational Inequalities and Some Applications of Nash Equilibrium Problems

L. Altangerel

German Mongolian Institute for Resources and Technology

June 21, 2019
The 6th International Conference on Optimization, Simulation and
Control, Ulaanbaatar



2021, July 5th- July 10th
Ulaanbaatar (Oulan Bator)
Mongolia

Data assimilation, optimization and applications



<https://lmv.math.cnrs.fr/cimpa-2021/>

Coordinators : Altangerel Lkhamsuren, GMIT
Laurent Dumas, Versailles University

Mini courses (hybrid online/on site)

Didier Aussel

“Multi-leader-follower games: recent theoretical advances and applications to the management of energy”

Enkbat Rentsen

“Optimization Applications in Economics and Finance”

Didier Lucor

“Introduction to optimization under uncertainty”

Sandra Ulrich NGueveu

“Reformulation and decomposition for integer programming”

Delphine Sinoquet

“Black-box simulation based optimization : algorithms and applications”

Ider Tseevendorj

“Global optimization with piecewise convex functions”





CIMPA SCHOOL - ULAANBAATAR, MONGOLIA

DATA ASSIMILATION, OPTIMIZATION AND APPLICATIONS

July 5-10, 2021



CIMPA School Final Report

Title of the school: Data Assimilation, Optimization, and Applications

Dates: July 5-10, 2021

Location: German-Mongolian Institute for Resources and Technology, Nalaikh

I. Summary

The CIMPA research school “Data Assimilation, Optimization, and Applications” took place in hybrid form from July 5 to July 10, 2021, at German-Mongolian Institute for Resources and Technology, Mongolia. Organizers of the research school are Prof. Laurent Dumas, Versailles University, France, and Prof. L.Altangerel, German-Mongolian Institute for Resources and Technology, Mongolia. The supervisor of the school from the CIMPA is Prof. Lidia Fernandez. Originally it was planned to be organized fully in the GMIT campus. Because of the COVID pandemic situation and after several discussions with CIMPA representatives, the organizers decided to organize the research school in hybrid form.

Optimization problems are encountered in many fields (engineering, finance, economics), and they can lead to various mathematical formulations: convex or nonconvex type function, black-box function, integer or continuous type, and with various constraints. The objective of this CIMPA school is to present various topics in the field of optimization and data assimilation to solve such applied problems.

Opening ceremony agenda

14:00 – 14:15	Greetings by
	<ul style="list-style-type: none">• Prof. B.Battsengel (Rector of GMIT)• Prof. Lidia Fernandez (CIMPA)• Mr. Philippe Merlin (Ambassador of France)
14:15 – 14:20	Musical performance (student band)
14:20 – 14:30	Brief introduction about the CIMPA research school and speakers

II. Scientific content

Six courses took place during this school. They all deal with various aspects of optimization and will often be linked with a particular application (finance, energy, ...).

During the first two days of the conference, an introductory course on optimization (basic theory in convex analysis, standard numerical tools like gradient-based or gradient free methods, etc...) was given.

Each course is divided into three talks of one hour and a half.

List of courses:

- ONLINE:** “*Multi-leader-follower games: recent theoretical advances and applications to the management of energy*” (Didier Aussel, Perpignan University)
- ONSITE:** “*Optimization Applications in Economics and Finance*” (Enkhbat Rentsen, National University of Mongolia)
- ONLINE:** “*Introduction to optimization under uncertainty*” (Didier Lucor, LISN Lab, Paris Saclay University)
- ONLINE:** “*Reformulation and decomposition for integer programming*” (Sandra Ulrich Ngueveu, Toulouse University)
- ONLINE:** “*Black-box simulation-based optimization: algorithms and applications*” (Delphine Sinoquet, IFPEN agency)
- ONSITE:** “*Global optimization with piecewise convex functions*” (Ider Tseevendorj, Versailles University)

Online classes were organized using Zoom software:

Date	05-juil.	06-juil.	07-juil.	08-juil.	09-juil.	10-juil.
Local time	Mon	Tue	Wed	Thurs	Fri	Sat
12.30-14.00			Course 3	Course 5	Course 3	Course 3
14.00-15.30	Course 0	Course 0	Course 2	Course 6	Course 4	Course 5
15.45-17.15	Course 1	Course 2	Course 4	Course 4	Course 6	Course 6
17.15-18.45	Course 0	Course 1	Course 1	Course 2	Course 5	

- Course 0 Introduction to optimization and data assimilation (Laurent Dumas)
- Course 1 Global optimization with piecewise convex functions (Ider Tseevendorj)
- Course 2 Reformulation and decomposition for interger programming (Sandra Ulrich Ngueveu)
- Course 3 Optimization applications in economics and finance (Enkhbat Rentsen)
- Course 4 Black box simulation based optimization: algorithms and applications (Delphine Sinoquet)
- Course 5 Multi leader follower games: recent theoretical advances and applications ti the management of energy (Didier Aussel)
- Course 6 Introduction to oprimization under uncertainty (Didier Lucor)

III. Participants

The research school organizers created the Google Form for the registration, it was integrated with links websites of the school:

<https://lmv.math.cnrs.fr/cimpa-2021/>

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdDMAVYiqLS_EcdL9awqfWH1IPNwX52C2RV6S3X6wtG2jTkOlA/viewform

<https://www.gmit.edu.mn/v/88>

We had registered participants from Mongolia, including NUM, MUST, Institute of Mathematics and Digital Technology from MAS, GMIT, Khovd University, Shine Mongol Institute, France, Italy, Spain, Senegal, Argentina, Morocco, and Pakistan. Additionally, 8 young scientists from the Institute of Mathematics and Digital Technology and GMIT attended classes at GMIT campus and followed all lectures during the research school. Online lectures have been organized using Zoom software and live streams to the Facebook page of GMIT to attract more followers during the research school.

Nº	Names	Organizatio/University	E-mail	Status
1	E.Enkhtsolmon	Institute of Mathematics and Digital Technology, MAS	enkhtsolmon@mac.ac.mn	Local participants
2	J.Davaajargal		j.davaajargal@gmail.com	
3	G.Gantigmaa		gantigscs@gmail.com	
4	Sh.Iderbayar			
5	Ch.Ankhbayar	NUM	Ankhaa.2020@gmail.com	
6	S.Baasansuren	MUST	bsnsm@must.edu.mn	
7	A.Bat-Erdene	Institute of Mathematics and Digital Technology, MAS	Bateredene.04021107@gmail.com	
8	M.Chagdarjav		chagdarjavm@mas.ac.mn	
9	B.Byambakhorol	GMIT, master student	b.byambakhorol@gmit.edu.mn	

IV. Financial Report

Budget for CIMPA research school "Data assimilation, optimization, and applications"

Nº	Classification	Units	Quantity	Unit price	Amount /₮/	Amount /Euro/	Resource
1	Travel costs of Prof. Ider Tseveendorj		1	1000 Euro		1000	Versailles University

2	Accommodation and meal costs for local speakers and participants (5 days* 4 people)	day	20	200000	4,000,000.00	1159	GMIT, Basic Research Project funded by Mongolian Foundation
3	Transportation (50 km*2 times*5 days*7 cars)	liter	280	1450	406,000.00	118	
4	Coffee break		100	10000	1,000,000.00	290	
5	Consumables/ certificate preparation, presents				1,000,000.00	290	
6	Lunch and meal (6 days *20 people)	day	120	30000	3,600,000.00	1043	CIMPA
7	Equipment for online teaching				4,257,000.00	1234	
	Total				14,263,000.00	5134	

V. Pictures

Links of news broadcasted and published during after the research school:

Eagle TV:

<https://www.facebook.com/gmit.edu/videos/505232373911339>

On the website of **the Ministry of Science and Education of Mongolia**:

<https://www.meds.gov.mn/post/70463>

The English version of this news from **MonTsaME**:

<https://www.montsame.mn/en/read/270088?fbclid=IwAR0bvyjz5RHuT8c4-6I7vPbTj42XWdlQRWuNSbIZ2AIH8L-YDgdo2iDJsXU>



Figure 1: Speech by Ambassador of France Mr. Philippe Merlin during the opening ceremony

A screenshot of a video conference interface. At the top, it says "LIVE on Facebook" and "You are viewing Laurent DUMAS's screen". The main area shows a presentation slide with handwritten notes. The notes include:

- CIMPA Course 0 : Introduction to (continuous) optimization
- Part 1: theoretical background (Monday, 14.30 → 16.00 local time)
 - Includes main definitions and vocabulary
 - optimality conditions
- Part 2: numerical background (Tuesday, 14.00 → 15.30)
 - Includes main descent algorithms
 - examples of numerical implementation

On the right side of the interface, there are three video feeds: a classroom view showing students at desks, a "Test User" view, and a close-up view of Prof. Laurent Dumas. The bottom of the screen shows standard video conference controls like Unmute, Start Video, Security, Participants (31), Chat, Share Screen, Record, Breakout Rooms, Reactions, More, and End.

Figure 2: First lecture on Introduction to Optimization and Data Assimilation by Prof. Laurent Dumas

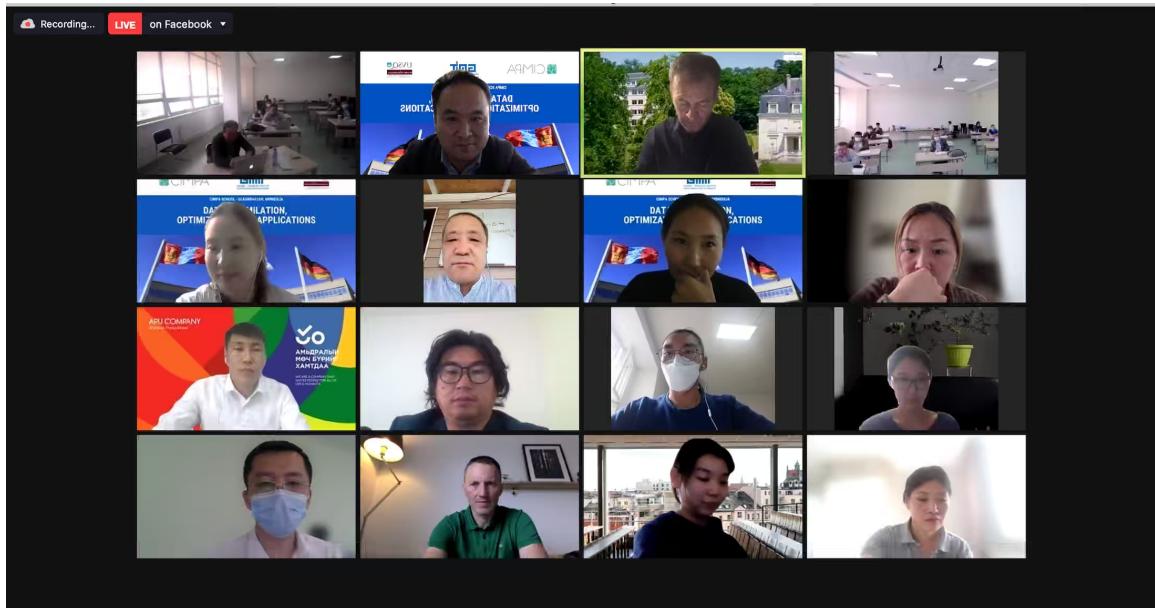


Figure 3: Group photo of participants

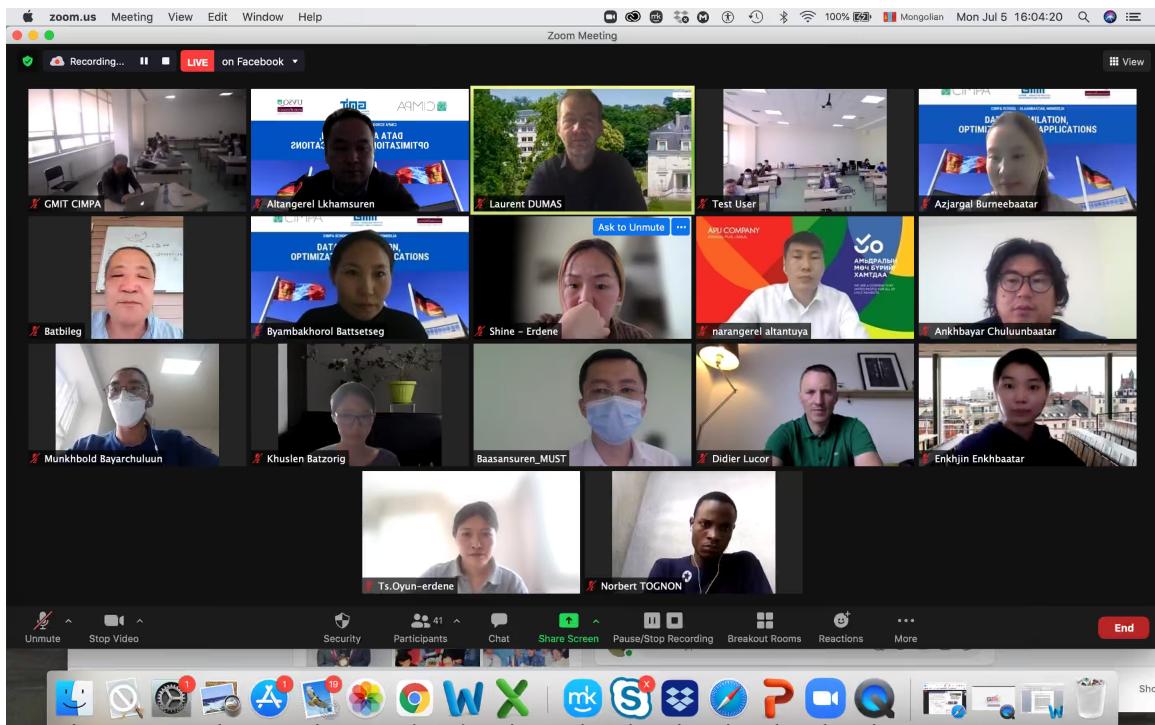


Figure 4: Group photo of participants

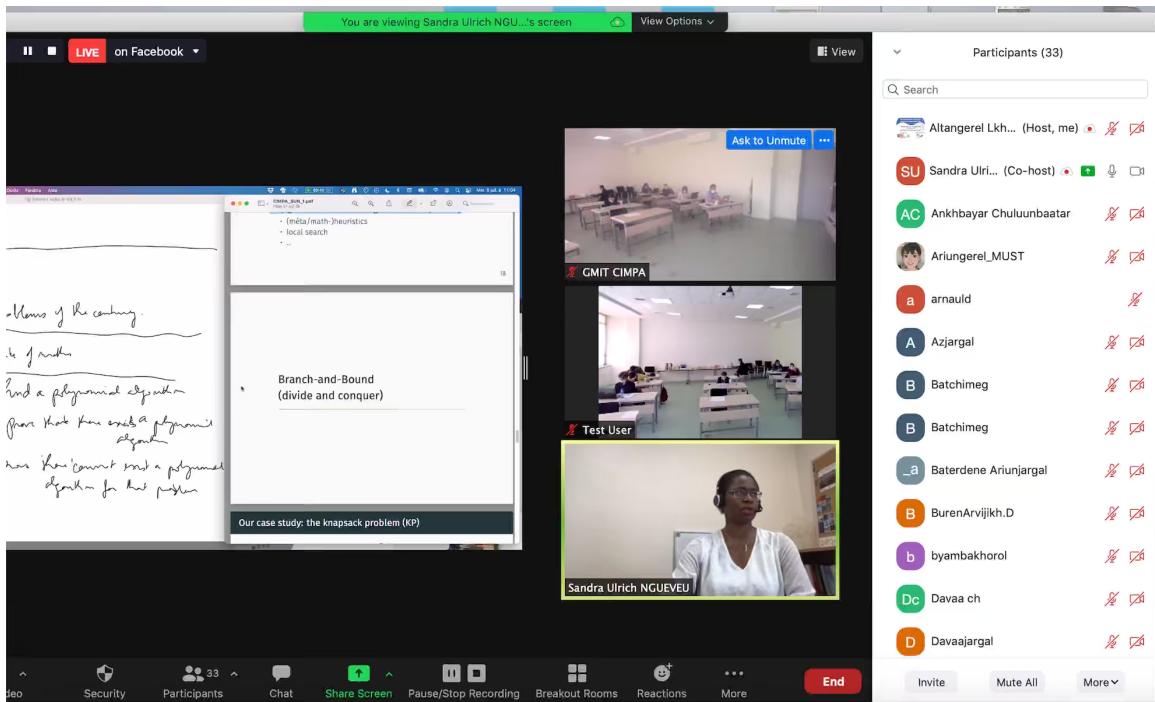


Figure 5: Prof. Sandra Ulrich Ngueveu, Toulouse University

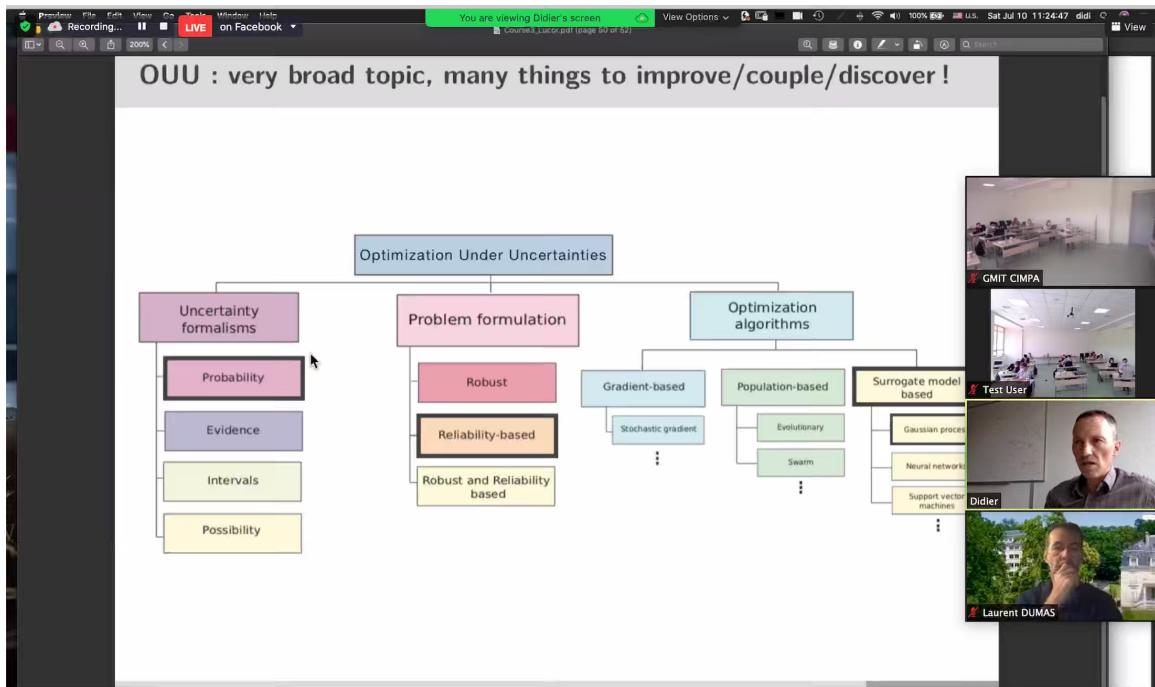


Figure 6: Didier Lucor, LISN Lab, Paris Saclay University



Figure 7: Local speakers and participants in GMIT campus



Figure 8: During the CIMPA school in the morning

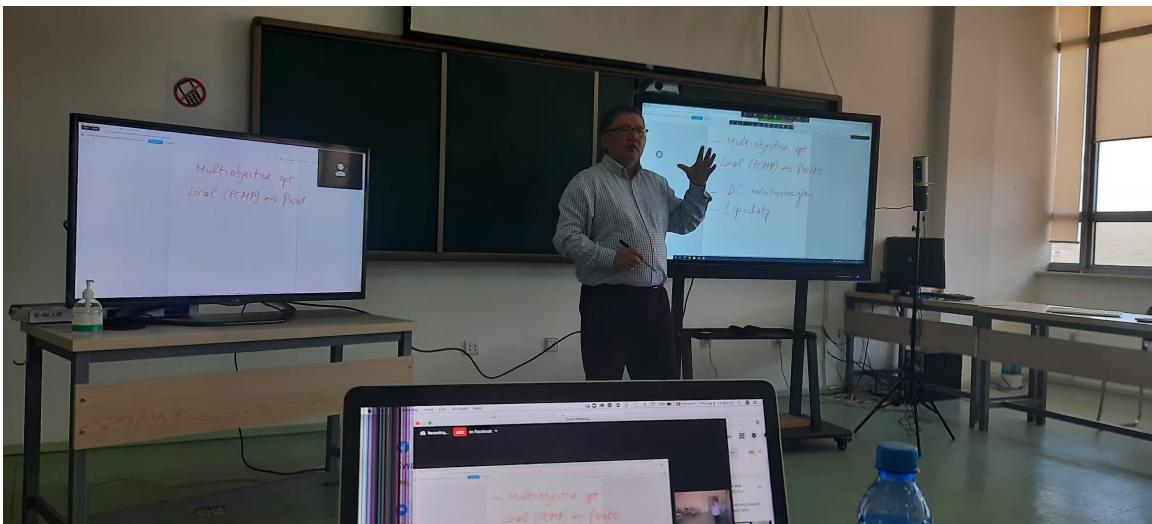


Figure 9: Prof. Ider Tseevendorj, Versailles University

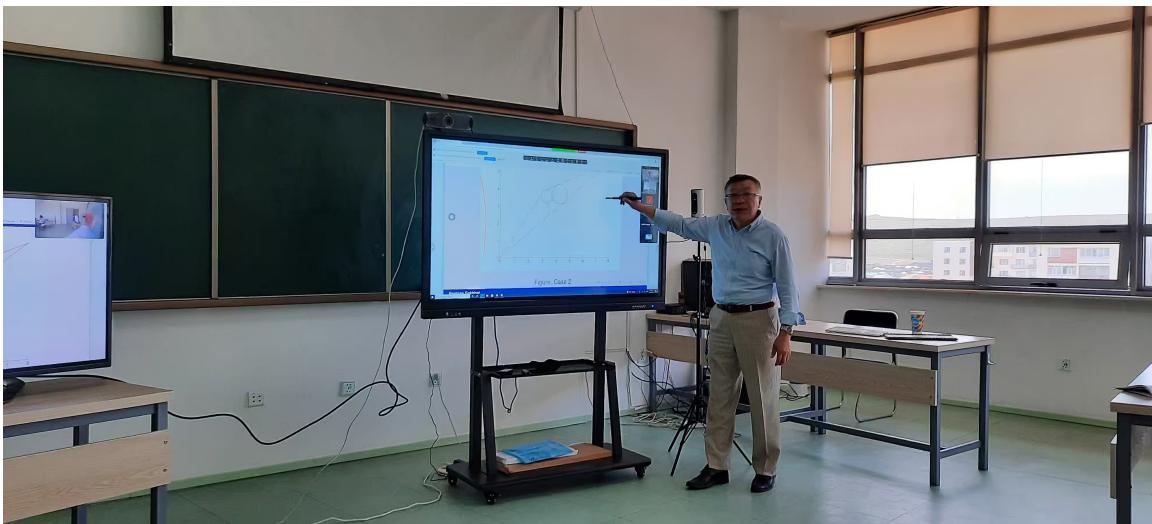


Figure 10: Prof. Enkhbat Rentsen, National University of Mongolia



Figure 7: Small presents to speakers and local participants from GMIT



Figure 8: Certificates to participants



Figure 9: After the closing ceremony

Appendix: registered participants using Google Form

	Title	First Name	Last Name	Institution name
1	Dr.	ABDOULAYE ALI	IBRAHIMA	UNIVERSITE ABDOU MOUMOUNI DE NIAMEY
2	Mr	Alejandro	Membrilla	University of Granada
3	Mr	Ankhbayar	Chuluunbaatar	National University of Mongolia
4	Ms	Ankhchimeg	Ganzorig	GMIT
5	Ms	Anun	Ganbat	AND SYSTEMS TECH
6	Dr.	Ariungerel	Jargal	MUST
7	Dr.	Ariungerel	Tsereljav	Khovd university
8	Mr	ARNAULD	TUYABA	Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP) de Dangbo-Bénin
9	Mr	Azjargal	Enkhbayar	Mongolian National University of Education
10	Ms	Bataa	Dulguuntuya	Dulguuntuya
11	Dr.	batbileg	Sukhee	NUM
12	Mr	batsaikhan	enkhtuvshin	Монгол улсын шинжлэх ухааны академи
13	Dr.	Bayanjargal	Darkhijav	National University of Mongolia
14	Mr	Burenarvijikh	Damdinsuren	Khovd university, department of math and
15	Ms	chadgarjav	Munkhdalai	Institute of Mathematics and Digital Technology
16	Mr	Dagvasuren	Ganbold	National University of Mongolia
17	Ms	Damaris	Kilango	African Institute for Mathematical Sciences
18	Mr	Davaajargal	Jargalsaikhan	Mongolian Academy of Science
19	Ms	Davaasuren	Bayarmagnai	Dawka
20	Ms	Davgadorj	Sukhbaatar	None

21	Ms	Delgermaa	Erkhemjargal	МУИС
22	Dr.	Dultuya	Terbish	National University of Mongolia
23	Dr.	Enkhbayar	Jamsranjav	National University of Mongolia
24	Ms	Enkhtsolmon	Erdeneoldokh	institute of mathematics and digital technology
25	Ms	Erdenepvrew	Enhtsatsral	There is no institution
26	Ms	Erdenetuya	Bayandalai	Applied mathematics
27	Mr	esen	dashnyam	National university of Mongolia
28	Mr	Gankhulug	Erdembileg	Institute of Mathematics and Digital Technology
29	Ms	Gantigmaa	Ganlkhangva	Gantigmaa
30	Mr	Iderbayar	Shiilegbat	Mongolian Academy of Sciences
31	Ms	Khaliun	Enkhtuvshin	14th school
32	Prof	Lkhamsuren	Altangerel	GMIT
33	Mr	Miguel	Reyes	National University of Salta- Argentina
34	Dr.	Mohammed	Abdellaoui	FSDMn USMBA Fez, Morocco
35	Dr.	Muhammad	Adil Khan	University of Peshawaf
36	Ms	Munkhsaikhan	Anuudari	National university of Mongolia
37	Mr	Norbert Djahou	TOGNON	Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP)
38	Ms	Otgonbileg	Dolgormaa	National University of Mongolia
39	Ms	Shine`	Tulgat	EmpaTTC Akademy
40	Ms	Shinetsetseg	Otgonsuren	Mongol aspirations school
41	Mr	Tengis	Odgerel	National University of Mongolia
42	Mr	Tserennorov	Munkhtogtokh	New Mongol Institution of Technology
43	Ms	Tseveensuren	Tsagaankhishig	Tseveensuren